

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA



TESIS DOCTORAL

**Étude géométrique et structures
différentielles
généralisées sur les algèbres de Lie quasi-
filiformes complexes et réelles**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

PRESENTADA POR

Lucía García Vergnolle

Bajo la dirección del doctor:

José María Ancochea Bermúdez

Madrid, 2010

ISBN: 978-84-693-3179-8

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Facultad de Ciencias Matemáticas

Departamento de Geometría y Topología

UNIVERSITÉ DE HAUTE ALSACE

Faculté de Sciences et Techniques

Laboratoire de Mathématiques,
Informatique et Applications

Étude géométrique et structures différentielles
généralisées sur les algèbres de Lie quasi-filiformes
complexes et réelles

Memoria presentada por **Lucía García Vergnolle**
para optar, en régimen de cotutela, al título de Doctor en Ciencias Matemáticas
por la Universidad Complutense de Madrid y la Université de Haute Alsace.
Dirigida por José María Ancochea Bermúdez (UCM) y Michel Goze (UHA).

Remerciements

Je voudrais avant tout témoigner ma gratitude à Messieurs les Professeurs J. M. Ancochea Bermúdez et M. Goze de m'avoir accueillie dans leurs équipes, suivie et soutenue tout au long de ces années de préparation de ma thèse.

Je tiens par ailleurs à exprimer toute ma reconnaissance envers les membres du Laboratoire de Mathématiques, Informatique et Applications, ainsi qu'au personnel administratif de l'Université de Haute Alsace qui m'ont si gentiment aidée et accueillie lors de mon séjour en France.

Je remercie aussi la Fondation Ramón Areces (Madrid) pour la bourse pré-doctorale ainsi que les projets de recherche MTM2006-09152 du M.I.C.I.N.N., CG07-UCM/ESP-2922 et GR58-08/4120818-920920 du UCM-BSCH.

Introduction

Le premier problème qui se pose naturellement lors de l'étude des algèbres de Lie nilpotentes est la classification de celles-ci en petite dimension. La classification des algèbres de Lie nilpotentes complexes a été complétée jusqu'en dimension 7. Pour les dimensions inférieures ou égales à 6, il n'existe, sauf isomorphismes, qu'un nombre fini d'algèbres de Lie nilpotentes complexes. Dans [2], on classe les algèbres de Lie nilpotentes complexes selon leur suite caractéristique. On obtient ainsi, une liste plus étendue qui contient des familles d'algèbres de Lie non isomorphes entre elles.

On envisage alors d'étudier les algèbres de Lie nilpotentes selon leur nilindice, en commençant par celles qui ont un nilindice maximal, c'est-à-dire, les algèbres de Lie filiformes. Dès 1970, Vergne a initié l'étude des algèbres de Lie filiformes [51]. Elle a montré que sur un corps ayant une infinité d'éléments, il n'existe, sauf isomorphismes, que deux algèbres de Lie filiformes naturellement graduées de dimension paire $2n$, nommées L_{2n} et Q_{2n} , et une seule en dimension impaire $2n + 1$, appelée L_{2n+1} avec $n \in \mathbb{N}$.

Plus récemment, Šnobl et Winternitz [48] ont déterminé les algèbres de Lie ayant comme nilradical l'algèbre L_n sur le corps des complexes et des réels. Afin de compléter cette classification à toutes les algèbres de Lie filiformes naturellement graduées, nous allons procéder de même avec les algèbres Q_{2n} .

Nous démontrons ensuite que si une algèbre de Lie indécomposable de dimension finie possède un nilradical filiforme alors elle est forcément résoluble. Les algèbres de Lie filiformes ne présentent donc aucun intérêt dans l'étude des algèbres de Lie non résolubles.

Ce résultat n'est plus vrai pour les algèbres de Lie quasi-filiformes dont leur nilradical est abaissé d'une unité par rapport aux filiformes. En effet, en cherchant toutes les algèbres de Lie dont le nilradical est quasi-filiforme naturellement gradué [27], on a trouvé des algèbres de Lie non résolubles ayant un nilradical quasi-filiforme.

Ce même contre-exemple, révèle aussi des différences entre la notion de rigidité dans \mathbb{R} et dans \mathbb{C} . La classification des algèbres de Lie rigides complexes ayant été déjà faite jusqu'à dimension 8 [8], on est alors amené à trouver cette classification dans le cas réel.

Par ailleurs, on a déterminé les algèbres de Lie quasi-filiformes ayant un tore non nul, on obtient une liste beaucoup plus riche que pour le cas filiforme [29]. Cette liste nous permet de prouver la complétude des algèbres de Lie quasi-filiformes. Rappelons que toutes les algèbres de Lie filiformes sont aussi complètes [3].

Finalement, on s'intéresse à l'existence de structures complexes associées aux algèbres de Lie filiformes et quasi-filiformes. Dans [30], on a démontré que les algèbres filiformes n'admettaient pas ce type de structure. Depuis une approche différente, nous allons redémontrer ce résultat et nous allons voir qu'il existe par contre des algèbres de Lie quasi-filiformes munies d'une structure complexe, mais seulement en dimension 4 et 6.

Table des matières

1	Généralités sur les algèbres de Lie	6
1.1	Notations	7
1.2	Algèbres de Lie résolubles et nilpotentes	8
1.3	Le théorème de Lévi	9
1.3.1	Sommes et représentations d'algèbres de Lie	9
1.3.2	Plus grands idéaux nilpotents et résolubles	10
1.3.3	Algèbres de Lie semi-simples	10
1.3.4	Le théorème de Lévi	11
1.4	Algèbres de Lie nilpotentes graduées naturellement	11
1.5	Tores de dérivations des algèbres de Lie nilpotentes	13
1.6	Cohomologie des algèbres de Lie	14
1.7	La variété des lois d'algèbres de Lie \mathfrak{L}_n	15
1.7.1	Contractions dans \mathfrak{L}_n	16
1.7.2	Déformations formelles	16
1.8	Structures géométriques d'une algèbre de Lie	17
1.8.1	Formes de Maurer-Cartan	17
1.8.2	Structures symplectiques et de contact	17
1.8.3	Structures complexes sur une algèbre de Lie	18
1.9	Invariants	18
2	Classification des algèbres dont le nilradical est Q_{2n}	20
2.1	Algèbres résolubles ayant un nilradical donné	21
2.2	Dérivations de l'algèbre Q_{2n}	21
2.3	Algèbres de Lie résolubles ayant Q_{2n} pour nilradical	23
2.4	Invariants de Casimir Généralisés	25
2.5	Propriétés géométriques des algèbres de Lie résolubles dont le nilradical est Q_{2n}	28
3	Inexistence d'algèbres de Lie indécomposables non résolubles ayant un radical associé aux algèbres filiformes	30
4	Algèbres de Lie complexes ayant un nilradical quasi-filiforme	34
4.1	Algèbres de Lie complexes ayant $\mathfrak{L}_{n-1} \oplus \mathbb{C}$ comme nilradical	34
4.2	Algèbres de Lie complexes ayant $\mathfrak{Q}_{2n} \oplus \mathbb{C}$ comme nilradical	36
4.3	Algèbres de Lie complexes ayant $\mathfrak{L}_{n,r}$ comme nilradical	38

4.4	Algèbres de Lie complexes ayant $\mathfrak{Q}_{n,r}$ comme nilradical	39
4.5	Algèbres de Lie complexes ayant $\mathfrak{T}_{n,n-3}$ comme nilradical	40
4.6	Algèbres de Lie complexes ayant $\mathfrak{T}_{n,n-4}$ comme nilradical	41
4.7	Algèbres de Lie complexes ayant $\mathfrak{E}_{7,3}$ comme nilradical	42
4.8	Algèbres de Lie complexes ayant $\mathfrak{E}_{9,5}^1$ comme nilradical	42
4.9	Algèbres de Lie complexes ayant $\mathfrak{E}_{9,5}^2$ comme nilradical	43
4.10	Algèbres de Lie complexes ayant $\mathfrak{E}_{9,5}^3$ comme nilradical	43
4.11	Démonstration	44
5	Classification des algèbres ayant un nilradical isomorphe à $\mathcal{L}_{5,3}$	46
5.1	Algèbres de petite dimension ayant $\mathcal{L}_{5,3}$ comme nilradical	46
5.2	Algèbres ayant $\mathcal{L}_{5,3}$ comme nilradical	52
5.3	Invariants de Casimir Généralisés	56
6	Sur les algèbres de Lie résolubles réelles algébriquement rigides	59
6.1	Système linéaire de racines d'une algèbre de Lie rigide résoluble complexe	59
6.2	Exemple	60
6.3	La classification des algèbres de Lie rigides résolubles réelles jusqu'à dimension 8	61
6.4	Invariants de Casimir Généralisés	65
6.5	Les algèbres de Lie résolubles rigides réelles ne sont pas nécessairement complètement résolubles	73
7	Sur les algèbres de Lie quasi-filiformes admettant un tore de dérivations	76
7.1	Antécédents	76
7.2	Algèbres de Lie quasi-filiformes et bases adaptées	77
7.3	Classification des algèbres de Lie quasi-filiformes de rang non nul	79
8	Sur les algèbres de Lie quasi-filiformes complétables	88
8.1	Introduction	88
8.2	Algèbres de Lie quasi-filiformes complétables	89
8.3	Sur le deuxième groupe de cohomologie des algèbres de Lie ayant un nilradical quasi-filiforme	91
9	Structures complexes sur les algèbres de Lie quasi-filiformes	93
9.1	Structures complexes généralisées sur une algèbre de Lie	93
9.1.1	Définitions et lien avec les Structures Complexes	93
9.1.2	Approche Spinorielle	95
9.1.3	Cas des algèbres de Lie nilpotentes	96
9.2	Etude des structures complexes sur les algèbres quasi-filiformes	97
9.2.1	Classification des algèbres quasi-filiformes graduées	97
9.2.2	Structures complexes sur les algèbres de Lie quasi-filiformes	99
9.3	L'algèbre de Lie \mathfrak{n}_6^{10}	102
10	Conclusions	104
11	Resumen en castellano	110
12	Publications/Publicaciones	128

Annexe :

Contractions d'algèbres de Jordan en dimension 2

132

Chapitre 1

Généralités sur les algèbres de Lie

Le but de ce mémoire est de classifier certains types d'algèbres de Lie réelles et complexes dont le nilradical possède une structure déterminée par la graduation naturelle. Les structures nilpotentes naturellement graduées jouent un rôle important puisque toute algèbre de Lie s'obtient par déformation de son algèbre graduée. Ceci nous donne une relation géométrique entre les orbites : si nous considérons l'orbite d'une algèbre de Lie sous l'action du groupe général linéaire, son algèbre graduée est en fait un point appartenant à l'adhérence de l'orbite. La classification des algèbres nilpotentes naturellement graduées est donc un point de départ qui permet d'envisager les classifications d'algèbres ayant une décomposition de Levi non triviale et dont le nilradical est naturellement gradué.

Ces dernières années et pour des raisons différentes, plusieurs auteurs ont entamé l'étude des algèbres de Lie ayant un nilradical naturellement gradué. Leurs travaux englobent divers aspects de la théorie de Lie : de la classification de familles d'algèbres en dimensions arbitraires ¹ jusqu'à la construction de systèmes hamiltoniens complètement intégrables, en passant par la recherche de nouveaux critères de rigidité ou bien la formulation de théories gauge non abéliennes.

Dans ce travail, nous envisageons la classification réelle des algèbres de Lie dont le nilradical \mathfrak{n} est naturellement gradué et possède une suite caractéristique $(\dim \mathfrak{n} - 2, 1, 1)$. La classification des algèbres de Lie nilpotentes naturellement graduées de nilindice maximal (appelées filiformes) représente un résultat classique [51] qui relève de l'importance dans l'étude des composantes de la variété des lois d'algèbres de Lie (les algèbres de Lie résolubles associées étant rigides).

Pour faire un pas en avant, nous considérons les algèbres de Lie dont le nilindice est abaissé d'une unité, c'est-à-dire, dont la suite caractéristique est celle décrite précédemment et qui s'appellent, par analogie, quasi-filiformes. Contrairement au cas filiforme, pour la classification des algèbres de Lie ayant un nilradical quasi-filiforme, il est indispensable de considérer des algèbres de Lie décomposables ce qui engendre une casuistique beaucoup plus riche. De toutes les algèbres de Lie quasi-filiformes nous prêtons une attention particulière à une famille d'algèbres de dimension 5 qui présente des propriétés géométriques intéressantes et de possibles applications aux systèmes dynamiques.

Dans les prochains chapitres, nous envisagerons la classification systématique des algèbres de Lie dont le nilradical est filiforme ou quasi-filiforme. Par ailleurs, nous analyserons brièvement les invariants de la représentation co-adjointe des algèbres de Lie résolubles ayant un certain nilradical. Dans tous les

¹Il est bien connu le fait que la classification des algèbres résolubles dès la dimension 7 est irréalisable car il n'existe pas de critères permettant de distinguer les orbites.

cas, les invariants sont des fonctions des opérateurs de Casimir de leur partie nilpotente. Ceci corrobore l'hypothèse émise dans [13] sur la structure des invariants des algèbres de Lie résolubles. D'autre part, nous étudions la rigidité de certaines algèbres obtenues auparavant ce qui apporte des remarques intéressantes sur la classification des algèbres de Lie réelles rigides. Nous en concluons l'invalidité, dans le cas réel, du théorème de structure de Carles [18] et la théorie des systèmes de poids de Favre [24].

1.1 Notations

Soit \mathbb{K} un corps, en général on considérera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition 1 Soit L un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et μ une application bilinéaire de $L \times L$ sur L telle que :

1. $\mu(X, X) = 0 \quad \forall X \in L$
2. $\mu(X, \mu(Y, Z)) + \mu(Y, \mu(Z, X)) + \mu(Z, \mu(X, Y)) = 0 \quad \forall X, Y, Z \in L$
(condition de Jacobi)

L l'espace vectoriel L muni de la loi μ définit alors une algèbre de Lie \mathfrak{g} sur le corps \mathbb{K} de dimension n .

La première propriété entraîne l'antisymétrie de μ , c'est-à-dire :

$$\mu(X, Y) = -\mu(Y, X) \quad \forall X, Y \in L$$

la réciproque n'étant vraie, que lorsque la caractéristique de \mathbb{K} est différente de 2.

Exemples.

1. Tout espace vectoriel peut être muni d'une structure d'algèbre de Lie en prenant :

$$\mu(X, Y) = 0 \quad \forall X, Y \in L$$

Cette algèbre de Lie est dite abélienne.

2. Soit A une algèbre associative, posons

$$\mu(X, Y) = XY - YX \quad \forall X, Y \in A$$

Alors A devient une algèbre de Lie, dite sous-jacente à l'algèbre A . Soit V un \mathbb{K} -espace vectoriel et $\text{End}(V)$ l'algèbre des endomorphismes de V . L'algèbre de Lie sous-jacente à $\text{End}(V)$ se note $\text{gl}(V, \mathbb{K})$ ou $\text{gl}(V)$.

Rappelons quelques définitions classiques.

Définition 2 Soient $\mathfrak{g} = (\mu, L)$ et $\mathfrak{g}' = (\mu', L')$ des algèbres de Lie.

1. Un sous-espace vectoriel A de L est une sous-algèbre de \mathfrak{g} si $\mu(A, A) = \{\mu(a, b)/a, b \in A\} \subseteq A$.
2. Un sous-espace vectoriel A de L est un idéal de \mathfrak{g} si $\mu(A, L) = \{\mu(a, b)/a \in A, b \in L\} \subseteq A$.
3. Le centre de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} est l'idéal abélien

$$Z(\mathfrak{g}) = \{X \in L / \mu(X, Y) = 0 \quad \forall Y \in L\}.$$

4. Un homomorphisme de \mathfrak{g} sur \mathfrak{g}' , est un homomorphisme linéaire $\Theta : L \rightarrow L'$ vérifiant :

$$\Theta(\mu(X, Y)) = \mu'(\Theta(X), \Theta(Y)) \quad \forall X, Y \in L$$

De plus, si Θ est bijective, on dit que c'est un isomorphisme d'algèbres de Lie .

5. On appelle une dérivation de \mathfrak{g} une application linéaire $D : L \rightarrow L$ telle que :

$$D(\mu(X, Y)) = \mu(D(X), Y) + \mu(X, D(Y)) \quad \forall X, Y \in L$$

L'ensemble $\text{Der}(\mathfrak{g})$ des dérivations est une sous-algèbre de Lie de $\text{gl}(L)$. Pour tout $X \in L$, on considère l'application :

$$\begin{aligned} \text{ad}(X) : L &\rightarrow L \\ Y &\mapsto [X, Y] \end{aligned}$$

L'application $X \mapsto \text{ad}(X)$ est un homomorphisme de \mathfrak{g} dans $\text{Der}(\mathfrak{g})$. Les dérivations de \mathfrak{g} de la forme $\text{ad}(X)$ s'appellent dérivations intérieures.

Remarque.

1. L'ensemble des matrices $A = (a_{i,j}) \in \text{gl}(n, \mathbb{C})$ de trace nulle est une sous-algèbre de Lie de $\text{gl}(n, \mathbb{C})$. Cette algèbre est appelée l'algèbre spéciale linéaire complexe, notée $\text{sl}(n, \mathbb{C})$.
2. Si A est une sous-algèbre de \mathfrak{g} , on appelle normalisateur de A dans \mathfrak{g} l'ensemble $N(A) = \{X \in L / \mu(X, A) \subset A\}$. C'est une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} et A est un idéal de $N(A)$.
3. Si I et J sont deux idéaux de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} , alors $I + J$, $I \cap J$ et $[I, J]$ sont aussi des idéaux de \mathfrak{g} .
4. Si I est un idéal de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} , l'espace vectoriel \mathfrak{g}/I est muni naturellement d'une structure d'algèbre de Lie .

1.2 Algèbres de Lie résolubles et nilpotentes

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie sur \mathbb{K} . On pose

$$D^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}, \quad D^i(\mathfrak{g}) = [D^{i-1}(\mathfrak{g}), D^{i-1}(\mathfrak{g})], \quad i \geq 1.$$

Par récurrence, on définit ainsi une suite décroissante d'idéaux, appelée suite dérivée de \mathfrak{g} .

On pose

$$C^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}, \quad C^i(\mathfrak{g}) = [C^{i-1}(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}], \quad i \geq 1.$$

On définit ainsi une suite décroissante d'idéaux, appelée suite centrale descendante de \mathfrak{g} .

Définition 3 Une algèbre de Lie \mathfrak{g} est dite nilpotente s'il existe un entier k tel que $C^k(\mathfrak{g}) = 0$. Le plus petit entier k tel que $C^k(\mathfrak{g}) = 0$ est appelé indice de nilpotence ou nilindice de \mathfrak{g} .

Une algèbre de Lie \mathfrak{g} est dite résoluble s'il existe un entier k tel que $D^k(\mathfrak{g}) = 0$.

On a $D^i(\mathfrak{g}) \subset C^i(\mathfrak{g})$ pour tout i , d'où la proposition suivante :

Proposition 1 Toute algèbre nilpotente est résoluble.

Le théorème d'Engel, nous donne une caractérisation des algèbres nilpotentes.

Théorème 1 Une algèbre de Lie \mathfrak{g} est nilpotente si et seulement si $\text{ad}(X)$ est nilpotente pour tout $X \in \mathfrak{g}$.

Remarquons que le nilindice d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} est inférieur ou égal à $\dim \mathfrak{g} - 1$.

Définition 4 Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie nilpotente de dimension n , \mathfrak{g} est dite filiforme si son nilindice est $n - 1$. On dit que \mathfrak{g} est quasi-filiforme si son nilindice est $n - 2$.

Les algèbres de Lie filiformes ont été largement étudiées dans la bibliographie. Dans ce travail, on va chercher une généralisation des résultats obtenus pour les algèbres de Lie filiformes aux quasi-filiformes.

Par ailleurs, on pose :

$$\mathfrak{g}^{[1]} = \text{Der}(\mathfrak{g}) = \{Y \in \mathfrak{g} / \exists f \in \text{Der} \exists X \in \mathfrak{g}, Y = f(X)\}, \quad \mathfrak{g}^{[i]} = \text{Der}(\mathfrak{g}^{[i-1]}), \quad i > 1.$$

On dit que l'algèbre \mathfrak{g} est caractéristiquement nilpotente s'il existe un entier k tel que $\mathfrak{g}^{[k]} = \{0\}$.

Théorème 2 Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie nilpotente de dimension supérieure ou égale à 2. L'algèbre \mathfrak{g} est caractéristiquement nilpotente si et seulement si son algèbre de dérivations $\text{Der}(\mathfrak{g})$ est nilpotente.

1.3 Le théorème de Lévi

1.3.1 Sommes et représentations d'algèbres de Lie

Soient \mathfrak{g}_1 et \mathfrak{g}_2 des algèbres de Lie. La somme directe vectorielle $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ peut être munie de la loi :

$$[(X_1, X_2), (Y_1, Y_2)] = ([X_1, Y_1], [X_2, Y_2]) \quad \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{g}_1, \quad \forall Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}_2$$

Ainsi, \mathfrak{g} devient une algèbre de Lie, dite somme directe de \mathfrak{g}_1 et \mathfrak{g}_2 qui se note aussi $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$.

On dira qu'une algèbre de Lie est indécomposable lorsque elle n'admet pas de décomposition en somme directe d'algèbres de Lie. Considérons maintenant l'homomorphisme d'algèbres de Lie

$$\begin{aligned} \rho : \quad \mathfrak{g}_1 &\rightarrow \text{Der}(\mathfrak{g}_2) \\ X &\mapsto D_X. \end{aligned}$$

Sur la somme directe vectorielle $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ on définit la loi :

$$[(X_1, X_2), (Y_1, Y_2)] = ([X_1, Y_1], [X_2, Y_2] + D_{X_1}(Y_2) - D_{Y_1}(X_2)) \quad \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{g}_1, \quad \forall Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}_2.$$

L'algèbre de Lie \mathfrak{g} munie de cette loi s'appelle somme semi-directe de \mathfrak{g}_1 par \mathfrak{g}_2 associée à l'homomorphisme ρ . Remarquons que le crochet vérifie :

$$\begin{aligned} [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] &\subseteq \mathfrak{g}_1 \\ [\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}] &\subseteq \mathfrak{g}_2. \end{aligned}$$

On notera cette somme semi-directe $\mathfrak{g}_1 \overrightarrow{\oplus}_{\rho} \mathfrak{g}_2$, \mathfrak{g}_2 étant toujours un idéal de \mathfrak{g} et \mathfrak{g}_1 une sous-algèbre.

Définition 5 Soient V un espace vectoriel et \mathfrak{g} une algèbre de Lie. Une représentation de \mathfrak{g} dans V est un homomorphisme d'algèbres de Lie ρ de \mathfrak{g} dans $\text{gl}(V)$.

Rappelons qu'une représentation peut être définie de façon univoque par une structure de \mathfrak{g} -module sur un espace vectoriel V , c'est-à-dire, par une application bilinéaire $\phi : \mathfrak{g} \times V \rightarrow V$ vérifiant :

$$\phi([X, Y], v) = \phi(X, \phi(Y, v)) - \phi(Y, \phi(X, v)) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g} \quad \forall v \in V$$

Cette équivalence est donnée par la relation $\rho(X)(v) = \phi(X, v)$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et $v \in V$. On représentera $\phi(X, v)$ par $X.v$ où $X \in \mathfrak{g}$ et $v \in V$.

Exemples.

1. Si V est un espace vectoriel, l'application $\rho(X) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$ s'appelle la représentation triviale de \mathfrak{g} .
2. L'application ρ de \mathfrak{g} dans $\text{gl}(\mathfrak{g})$ donnée par $\rho(X) = \text{ad}(X)$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$, est une représentation appelée représentation adjointe.
3. Soient V et V' des \mathfrak{g} -modules, alors $M = \text{Hom}(V, V')$ est aussi muni d'une structure de \mathfrak{g} -module avec :

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \times M &\rightarrow M \\ (X, u) &\mapsto X_M.u \end{aligned}$$

où $(X_M.u)(v) = X_{V'}.u(v) - u(X_V.v)$ pour tout $v \in V$.

Prenons, en particulier, $V' = \mathbb{K}$ muni de la représentation triviale de \mathfrak{g} dans \mathbb{K} . On obtient ainsi une structure de \mathfrak{g} -module sur $M = V^*$ qui est appelée \mathfrak{g} -module dual du \mathfrak{g} -module V . Si ρ est la représentation correspondante à V , sa représentation duale est définie par son \mathfrak{g} -module dual et se note ρ^* .

4. La représentation duale de la représentation adjointe s'appelle représentation coadjointe. Elle est définie par $\text{ad}^*(X)(u) = -u \circ \text{ad}(X)$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et $u \in \mathfrak{g}^*$.

Soient $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ deux algèbres de Lie et ρ une représentation de \mathfrak{g}_1 dans \mathfrak{g}_2 . Si, pour tout $X \in \mathfrak{g}_1$, $\rho(X)$ est une dérivation de \mathfrak{g}_2 , on peut alors considérer la somme semi-directe $\mathfrak{g}_1 \xrightarrow{\rho} \mathfrak{g}_2$. En particulier, quand ρ est la représentation triviale, il s'agit d'une somme directe.

1.3.2 Plus grands idéaux nilpotents et résolubles

Si I et J sont deux idéaux résolubles d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} , alors l'idéal $I + J$ est aussi résoluble. On en déduit l'existence d'un idéal résoluble qui contient tous les autres, d'où la définition suivante.

Définition 6 *Le radical d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} , noté par $\text{rad}(\mathfrak{g})$, est le plus grand idéal résoluble pour l'inclusion.*

De façon analogue, on montre l'existence et l'unicité du nilradical défini ci-dessous.

Définition 7 *Le nilradical d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} , noté par $\text{nil}(\mathfrak{g})$, est le plus grand idéal nilpotent pour l'inclusion.*

Il est clair que $Z(\mathfrak{g}) \subset \text{nil}(\mathfrak{g}) \subset \text{rad}(\mathfrak{g})$.

1.3.3 Algèbres de Lie semi-simples

Définition 8 *Une algèbre de Lie est dite semi-simple quand elle ne possède pas d'idéaux abéliens. Une algèbre de Lie est dite simple si elle n'a pas d'idéaux propres.*

Théorème 3 *Une algèbre de Lie semi-simple est somme directe d'algèbres simples.*

1.3.4 Le théorème de Lévi

Théorème 4 Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie et \mathfrak{r} son radical. Il existe une sous-algèbre semi-simple \mathfrak{s} de \mathfrak{g} telle que $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus_{\rho} \mathfrak{r}$, ρ étant une représentation de \mathfrak{s} dans \mathfrak{r} .

Ce théorème permet de réduire l'étude des algèbres de Lie à celles des semi-simples et des résolubles. La classification des algèbres semi-simples complexes est parfaitement connue grâce aux travaux de Killing et Cartan. En résumé, toute algèbre de Lie simple est isomorphe ou bien à une algèbre de Lie classique : $su(n, \mathbb{C})$ (type A_n), $so(2n+1, \mathbb{C})$ (type B_n), $sp(n, \mathbb{C})$ (type C_n), $so(2n, \mathbb{C})$ (type D_n) ou bien à une algèbre de Lie exceptionnelle, c'est-à-dire du type E_6, E_7, E_8, F_4 et G_2 . Par contre, il n'en est pas de même pour les algèbres résolubles et en particulier pour les nilpotentes.

1.4 Algèbres de Lie nilpotentes graduées naturellement

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie nilpotente de dimension n et nilindice m . Elle est naturellement filtrée par la suite centrale descendante :

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g} \supseteq \mathfrak{g}_2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \supseteq \mathfrak{g}_3 = [\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}] \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{g}_{k+1} = [\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}] \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{g}_{m+1} = \{0\}$$

On peut alors associer une algèbre de Lie graduée, notée par $gr(\mathfrak{g})$, et définie par :

$$gr \mathfrak{g} = \sum_{i=1}^m \frac{\mathfrak{g}_i}{\mathfrak{g}_{i+1}} = \sum_{i=1}^m W_i$$

dont le crochet est donné par :

$$[X + \mathfrak{g}_{i+1}, Y + \mathfrak{g}_{j+1}] = [X, Y] + \mathfrak{g}_{i+j+1} \quad \forall X \in \mathfrak{g}_i \quad \forall Y \in \mathfrak{g}_j$$

On dit que \mathfrak{g} est une algèbre de la forme $\{p_1, \dots, p_m\}$ si $\dim \frac{\mathfrak{g}_i}{\mathfrak{g}_{i+1}} = p_i$. Remarquons que $gr(\mathfrak{g})$ est de la même forme que \mathfrak{g} .

Notons que les algèbres de Lie filiformes sont de la forme $\{2, 1, 1, \dots, 1\}$. On en déduit que l'algèbre graduée d'une algèbre filiforme est aussi filiforme.

Définition 9 Une algèbre \mathfrak{g} est graduée naturellement quand elle est isomorphe à $gr \mathfrak{g}$.

Une algèbre de Lie \mathfrak{g} graduée naturellement peut alors se décomposer sous la forme $\mathfrak{g} = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_m$ où les $W_i = \frac{\mathfrak{g}_i}{\mathfrak{g}_{i+1}}$ vérifient $[W_i, W_j] = W_{i+j}$ pour $i+j \leq m$.

La classification des algèbres de Lie filiformes graduées naturellement est due à Vergne [51].

Théorème 5 Toute algèbre de Lie filiforme et graduée naturellement sur un corps ayant une infinité d'éléments est isomorphe à l'une des algèbres suivantes :

1. L_n ($n \geq 3$) définie dans la base $\{X_0, X_1, \dots, X_{n-1}\}$ par :

$$[X_0, X_i] = X_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-2.$$

(les crochets non écrits étant nuls, exceptés ceux découlant de l'antisymétrie)

2. Q_n ($n = 2m$, $m \geq 3$) définie dans la base $\{X_0, X_1, \dots, X_{n-1}\}$ par :

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_j, X_{n-j-1}] &= (-1)^{j-1} X_{n-1}, \quad 1 \leq j \leq m-1. \end{aligned}$$

En conséquence, sauf isomorphisme, il existe deux algèbres filiformes graduées naturellement de dimension paire et une seule algèbre filiforme graduée naturellement de dimension impaire.

Si une algèbre \mathfrak{g} est quasi-filiforme, en suivant les notations précédentes, il existe deux possibilités :

1. Soit \mathfrak{g} est de la forme $t_1 = \{p_1 = 3, p_2 = 1, p_3 = 1, \dots, p_{n-2} = 1\}$.
2. Soit \mathfrak{g} est de la forme $t_r = \{p_1 = 2, p_2 = 1, \dots, p_{r-1} = 1, p_r = 2, p_{r+1} = 1, \dots, p_{n-2} = 1\}$ où $r \in \{2, \dots, n-2\}$.

Proposition 2 [27] Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie complexe, quasi-filiforme graduée naturellement de dimension n et de la forme t_r où $r \in \{1, \dots, n-2\}$. Il existe alors une base homogène $\{X_0, X_1, X_2, \dots, X_{n-1}\}$ de \mathfrak{g} avec X_0 et X_1 dans W_1 , $X_i \in W_i$ pour $i \in \{2, \dots, n-2\}$ et $X_{n-1} \in W_r$ dans laquelle \mathfrak{g} est une des algèbres décrites ci-dessous.

1. \mathfrak{g} est de la forme t_1

$$(a) \quad L_{n-1} \oplus \mathbb{C} \quad (n \geq 4)$$

$$[X_0, X_i] = X_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-3.$$

$$(b) \quad Q_{n-1} \oplus \mathbb{C} \quad (n \geq 7, n \text{ impair})$$

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4, \\ [X_i, X_{n-i-2}] &= (-1)^{i-1} X_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}. \end{aligned}$$

2. \mathfrak{g} est de la forme t_r où $r \in \{2, \dots, n-2\}$

$$(a) \quad \mathfrak{L}_{n,r}; \quad n \geq 5, r \text{ impair}, \quad 3 \leq r \leq 2\left[\frac{n-1}{2}\right] - 1$$

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & i = 1, \dots, n-3 \\ [X_i, X_{r-i}] &= (-1)^{i-1} X_{n-1}, & i = 1, \dots, \frac{r-1}{2} \end{aligned}$$

$$(b) \quad \mathfrak{Q}_{n,r}; \quad n \geq 7, n \text{ impair}, r \text{ impair}, \quad 3 \leq r \leq n-4$$

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & i = 1, \dots, n-4 \\ [X_i, X_{r-i}] &= (-1)^{i-1} X_{n-1}, & i = 1, \dots, \frac{r-1}{2} \\ [X_i, X_{n-2-i}] &= (-1)^{i-1} X_{n-2}, & i = 1, \dots, \frac{n-3}{2} \end{aligned}$$

$$(c) \quad \mathfrak{T}_{n,n-4}; \quad n \geq 7, n \text{ impair}$$

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & i = 1, \dots, n-5 \\ [X_0, X_{n-3}] &= X_{n-2}, \\ [X_0, X_{n-1}] &= X_{n-3}, \\ [X_i, X_{n-4-i}] &= (-1)^{i-1} X_{n-1}, & i = 1, \dots, \frac{n-5}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] &= (-1)^{i-1} \frac{n-3-2i}{2} X_{n-3}, & i = 1, \dots, \frac{n-5}{2} \\ [X_i, X_{n-2-i}] &= (-1)^i (i-1) \frac{n-3-i}{2} X_{n-2}, & i = 2, \dots, \frac{n-3}{2} \end{aligned}$$

(d) $\mathfrak{T}_{n,n-3}; \quad n \geq 6, n \text{ pair}$

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & i &= 1, \dots, n-4 \\ [X_0, X_{n-1}] &= X_{n-2}, \\ [X_i, X_{n-3-i}] &= (-1)^{i-1} X_{n-1}, & i &= 1, \dots, \frac{n-4}{2} \\ [X_i, X_{n-2-i}] &= (-1)^{i-1} \frac{n-2-2i}{2} X_{n-2}, & i &= 1, \dots, \frac{n-4}{2} \end{aligned}$$

(e) $\mathfrak{E}_{9,5}^1$

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & i &= 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ [X_0, X_8] &= X_6, & [X_2, X_8] &= -3X_7, \\ [X_1, X_4] &= X_8, & [X_1, X_5] &= 2X_6, \\ [X_1, X_6] &= 3X_7, & [X_2, X_3] &= -X_8, \\ [X_2, X_4] &= -X_6, & [X_2, X_5] &= -X_7. \end{aligned}$$

(f) $\mathfrak{E}_{9,5}^2$

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & i &= 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ [X_0, X_8] &= X_6, & [X_2, X_8] &= -X_7, \\ [X_1, X_4] &= X_8, & [X_1, X_5] &= 2X_6, \\ [X_1, X_6] &= X_7, & [X_2, X_3] &= -X_8, \\ [X_2, X_4] &= -X_6, & [X_2, X_5] &= X_7, \\ [X_3, X_4] &= -2X_7. \end{aligned}$$

(g) $\mathfrak{E}_{9,5}^3$

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & i &= 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ [X_0, X_8] &= X_6, & [X_1, X_4] &= X_8, \\ [X_1, X_5] &= 2X_6, & [X_2, X_3] &= -X_8, \\ [X_2, X_4] &= -X_6, & [X_2, X_5] &= 2X_7, \\ [X_3, X_4] &= -3X_7. \end{aligned}$$

(h) $\mathfrak{E}_{7,3}$

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & i &= 1, 2, 3, 4 \\ [X_0, X_6] &= X_4, & [X_2, X_6] &= -X_5, \\ [X_1, X_2] &= X_6, & [X_1, X_3] &= X_4, \\ [X_1, X_4] &= X_5. \end{aligned}$$

On en déduit qu'il n'y a pas d'algèbres quasi-filiformes de la forme t_2 .

Remarque. L'algèbre $\mathfrak{E}_{9,5}^3$ ne se trouve pas dans la classification [27]. En effet, quand on cherche les algèbres de dimension 9 ayant une dérivation diagonale de la forme $\text{diag}(1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 5)$, on obtient facilement trois algèbres spéciales, isomorphes respectivement à $\mathfrak{E}_{9,5}^1$, $\mathfrak{E}_{9,5}^2$ et $\mathfrak{E}_{9,5}^3$. De plus, cette algèbre est d'une importance considérable dans le problème de rigidité [8] [31].

1.5 Tores de dérivations des algèbres de Lie nilpotentes

Soit \mathfrak{n} une algèbre de Lie complexe nilpotente, un tore T de \mathfrak{n} est une sous-algèbre abélienne de $\text{Der}(\mathfrak{n})$ composée d'endomorphismes semi-simples. Si T est un tore de \mathfrak{n} , alors \mathfrak{n} admet la décomposition :

$$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in T^*} \mathfrak{n}_\alpha \tag{1.1}$$

où $T^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(T, \mathbb{C})$ et $\mathfrak{n}_{\alpha} = \{X \in \mathfrak{n} \mid [t, X] = \alpha(t)X \ \forall t \in T\}$ est l'espace des poids correspondant au poids α .

Tous les tores maximaux (par rapport à l'inclusion) sont deux à deux conjugués par automorphismes intérieurs. Ainsi, la dimension des tores maximaux est un invariant de \mathfrak{n} appelé rang de \mathfrak{n} que l'on note $r(\mathfrak{n})$. Selon [24], on appelle

$$R\mathfrak{n}(T) = \{\alpha \in T^* \mid \mathfrak{n}_{\alpha} \neq 0\} \quad (1.2)$$

l'espace des poids de T et

$$P\mathfrak{n}(T) = \{(\alpha, d\alpha) \mid \alpha \in R\mathfrak{n}(T), d\alpha = \dim \mathfrak{n}_{\alpha}\} \quad (1.3)$$

le système de poids de \mathfrak{n} par rapport à T .

1.6 Cohomologie des algèbres de Lie

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie sur le corps \mathbb{K} et V un \mathfrak{g} -module. Une p -cochaîne ($p \geq 1$) est une application multilinéaire alternée de \mathfrak{g}^p dans V et, par convention, une 0-cochaîne est une fonction constante sur V . Ainsi, l'espace des p -cochaînes se définit de la façon suivante :

$$C^p(\mathfrak{g}, V) = \begin{cases} \text{Hom}(\bigwedge^p \mathfrak{g}, V) & \text{si } p \geq 1 \\ V & \text{si } p = 0 \\ \{0\} & \text{si } p < 0 \end{cases}$$

L'ensemble $C^*(\mathfrak{g}, V) = \bigoplus C^p(\mathfrak{g}, V)$ s'appelle l'espace des cochaînes.

L'espace des cochaînes est muni d'une structure de \mathfrak{g} -module en posant

$$(X \cdot \Phi)(X_1, \dots, X_p) = X \cdot \Phi(X_1, \dots, X_p) + \sum_{1 \leq i \leq p} (-1)^i \Phi(X_1, \dots, X_{i-1}, [X, X_i], \dots, X_p)$$

où $X, X_1, \dots, X_p \in \mathfrak{g}$ et $\Phi \in C^p(\mathfrak{g}, V)$.

Cette opération nous permet de définir l'opérateur cobord $d : C^*(\mathfrak{g}, V) \rightarrow C^*(\mathfrak{g}, V)$ comme :

$$\begin{aligned} d\Phi(X) &= X \cdot \Phi, \quad \Phi \in C^0(\mathfrak{g}, V), \quad X \in \mathfrak{g} \\ d\Phi(X_1, \dots, X_{p+1}) &= \sum_{1 \leq s \leq p+1} (-1)^{s+1} (X_s \cdot \Phi)(X_1, \dots, X_{s-1}, X_{s+1}, \dots, X_{p+s}) + \\ &\quad \sum_{1 \leq s \leq t \leq p+1} (-1)^{s+t} \Phi([X_s, X_t], X_1, \dots, \widehat{X_s}, \dots, \widehat{X_t}, \dots, X_{p+1}) \end{aligned}$$

avec $\Phi \in C^p(\mathfrak{g}, V)$, $p \geq 1$ et $X_1, \dots, X_{p+1} \in \mathfrak{g}$. Le signe \widehat{X} signifie que le vecteur X est omis.

Il est facile de vérifier que $dC^p(\mathfrak{g}, V) \subseteq C^{p+1}(\mathfrak{g}, V)$ et que $d^2 = 0$.

Notons $d_p : C^p \rightarrow C^{p+1}$ la restriction de l'opérateur cobord au sous-espace des p -cochaînes.

Une p -cochaîne Φ vérifiant $d_p \Phi = 0$ est un p -cocycle.

Une p -cochaîne Φ est un cobord s'il existe une $(p-1)$ -cochaîne Ψ telle que $\Phi = d_{p-1} \Psi$.

On note respectivement l'ensemble des p -cycles et des p -cobords par $Z^p(\mathfrak{g}, V)$ et $B^p(\mathfrak{g}, V)$, c'est-à-dire :

$$Z^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \text{Ker}(d_p : C^p \rightarrow C^{p+1})$$

$$B^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = d_{p-1}(C^{p-1}(\mathfrak{g}, V))$$

Comme $d^2 = 0$, on en déduit que $B^p(\mathfrak{g}, V) \subseteq Z^p(\mathfrak{g}, V)$.

L'espace quotient $H^p(\mathfrak{g}, V) = \frac{Z^p(\mathfrak{g}, V)}{B^p(\mathfrak{g}, V)}$ s'appelle le groupe de cohomologie de degré p de \mathfrak{g} à valeurs dans

V .

On convient que :

$$H^0(\mathfrak{g}, V) = Z^0(\mathfrak{g}, V) = \{v \in V \mid X.v = 0 \ \forall X \in \mathfrak{g}\}$$

Dorénavant, on considérera $V = \mathfrak{g}$ avec la représentation adjointe. La cohomologie que l'on obtient alors s'appelle la cohomologie de Chevalley.

Dans ce cas, le groupe de cohomologie $H^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ coïncide avec le centre $Z(\mathfrak{g})$ de \mathfrak{g} .

Par ailleurs, l'espace $Z^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ coïncide avec l'espace des dérivations de \mathfrak{g} et l'espace des cobords $B^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ avec celui des dérivations intérieures. Ainsi, on peut interpréter $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ comme l'ensemble des dérivations extérieures de \mathfrak{g} .

Définition 10 On dit qu'une algèbre de Lie \mathfrak{g} est algébriquement rigide si son deuxième groupe de cohomologie est nul, c'est-à-dire, $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \{0\}$.

1.7 La variété des lois d'algèbres de Lie \mathfrak{L}_n

On considère une base fixe $\{X_1, \dots, X_n\}$ de \mathbb{K}^n . La loi $\mu : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ associée à une certaine algèbre de Lie \mathfrak{g} est déterminée par :

$$\mu(X_i, X_j) = \sum C_{ij}^k X_k.$$

Les constantes C_{ij}^k s'appellent les constantes de structures et définissent un tenseur de type $(2, 1)$. La condition d'antisymétrie se traduit par

$$C_{ij}^k = -C_{ji}^k \quad \forall i, j, k \in \{1, \dots, n\}$$

en particulier, $C_{ii}^k = 0 \quad \forall i, k \in \{1, \dots, n\}$.

La condition de Jacobi s'écrit

$$\sum_{l=1}^n C_{ij}^l C_{kl}^s + C_{jk}^l C_{il}^s + C_{ki}^l C_{jl}^s = 0, \quad 1 \leq s \leq n, \quad 1 \leq i \leq j < k \leq n. \quad (1.4)$$

On identifie la loi μ à ses constantes de structure. L'ensemble, \mathfrak{L}^n des lois d'algèbres de Lie est donc une variété algébrique de $\mathbb{K}^{\frac{n^3-n^2}{2}}$ définie par l'équation 1.4.

La topologie usuelle de la variété \mathfrak{L}^n est la topologie métrique induite par $\mathbb{K}^{\frac{n^3-n^2}{2}}$. Il est aussi naturel de munir \mathfrak{L}^n de la topologie de Zariski moins fine que la précédente.

On considère l'action de $GL(n, \mathbb{K})$ sur \mathfrak{L}^n :

$$\begin{aligned} GL(n, \mathbb{K}) \times \mathfrak{L}^n &\rightarrow \mathfrak{L}^n \\ (\Phi, \mu) &\mapsto \Phi * \mu \end{aligned}$$

définie par $(\Phi * \mu)(X, Y) = \Phi(\mu(\Phi^{-1}(X), \Phi^{-1}(Y)))$, $\forall X, Y \in \mathbb{C}^n$.

Il est clair que l'orbite $\mathcal{O}(\mu)$ de μ correspondante à cette action est l'ensemble des lois isomorphes à μ .

Définition 11 Une algèbre de Lie $\mathfrak{g} = (\mu, \mathbb{K}^n)$ de loi μ est rigide si son orbite $\mathcal{O}(\mu)$ est ouverte dans \mathfrak{L}^n munie de la topologie usuelle.

Théorème 6 (*Théorème de structure Carles*)

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie résoluble et rigide sur un corps algébriquement clos. Elle se décompose alors sous la forme $\mathfrak{r} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}$ où \mathfrak{n} est le nilradical de \mathfrak{g} et \mathfrak{t} est une sous-algèbre abélienne dont les éléments sont $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$ -semi-simples (\mathfrak{t} est appelé tore extérieur de dérivations).

Théorème 7 (*Nijenhuis-Richardson*)

Si le deuxième groupe de cohomologie $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ est nul alors \mathfrak{g} est rigide, c'est-à-dire, la rigidité algébrique implique la rigidité géométrique.

1.7.1 Contractions dans \mathcal{L}_n

Définition 12 Soit $\mathfrak{g} = (\mu, \mathbb{C}^n)$ une algèbre de Lie complexe. Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0 = (\mu_0, \mathbb{C}^n)$ est une contraction de \mathfrak{g} si $\mu_0 \in \overline{\mathcal{O}(\mu)}^{\text{Zariski}}$

La notion de contraction a été introduite par Segal. Il considère une suite $(\Phi_p)_{p \in \mathbb{N}}$ d'isomorphismes de \mathbb{C}^n et la suite des lois $\mu_p = \Phi_p * \mu$ appartenant à l'orbite de μ . Si la limite $\mu_0 = \lim_{p \rightarrow \infty} \mu_p$ existe, alors μ_0 est une contraction de μ . On remarque que les adhérences d'une orbite dans la topologie de Zariski et dans la topologie usuelle sont égales. On en déduit que les deux définitions sont équivalentes.

En particulier, une contraction d'Inönü-Wigner est la limite $\mu_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu_{\epsilon}$ où la famille d'isomorphismes $\{\Phi_{\epsilon}\}$ est de la forme :

$$\Phi_{\epsilon} = \Phi_1 + \epsilon \Phi_2$$

avec $\Phi_1 \in \text{gl}(n, \mathbb{C})$, $\Phi_2 \in \text{Gl}(n, \mathbb{C})$ et $\det(\Phi_1) = 0$.

1.7.2 Déformations formelles

Définition 13 Une déformation formelle d'une algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}_0 = (\mu_0, \mathbb{C}^n)$ est une série formelle

$$\mu_t = \mu_0 + \sum_{i=1}^{\infty} t^i F_i$$

où les $F_i : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ sont des applications bilinéaires antisymétriques et μ_t vérifie la condition de Jacobi formelle.

Le premier terme F_1 de la déformation μ_t s'appelle la déformation infinitésimale associée à μ_t .

La condition de Jacobi formelle signifie que tous les coefficients de la série formelle $\mu_t(\mu_t(X, Y), Z) + \mu_t(\mu_t(Y, Z), X) + \mu_t(\mu_t(Z, X), Y)$ sont nuls.

En imposant que le coefficient d'ordre 0 soit nul, on retrouve la condition de Jacobi sur μ_0 . Si on considère $F_1 \in C^2(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0)$, le coefficient d'ordre 1 nous donne $dF_1 = 0$. Les déformations infinitésimales sont donc des 2-cocycles de \mathfrak{g}_0 .

Exemples.

1. Quand $F_i = 0$ pour $i \geq 1$, on obtient la déformation nulle.
2. Une déformation linéaire est de la forme :

$$\mu_t = \mu_0 + tF_1$$

avec $F_1 \in Z^2(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0)$. La condition de Jacobi formelle équivaut alors à ce que le terme F_1 vérifie aussi Jacobi.

Définition 14 On dit que deux déformations μ_t et μ'_t de \mathfrak{g}_0 sont équivalentes s'il existe un automorphisme de l'ensemble des séries formelles $g(t) = Id + \sum_{p=1}^{\infty} G_p t^p$ avec $G_p \in GL(n, \mathbb{C})$ telle que

$$\mu_t(X, Y) = (g(t)\mu'_t)(g(t)^{-1}X, g(t)^{-1}Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}_0.$$

Les déformations équivalentes à la déformation nulle sont appelées déformations triviales.

Si deux déformations sont équivalentes alors les déformations infinitésimales sont égales modulo $B^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$, la réciproque étant vraie aussi pour les déformations linéaires [44].

1.8 Structures géométriques d'une algèbre de Lie

1.8.1 Formes de Maurer-Cartan

Soit G un groupe de Lie de dimension n , rappelons que l'ensemble des invariants à gauche sur G est une algèbre de Lie dite algèbre de Lie de G que nous appellerons \mathfrak{g} .

Soit ω une forme différentielle sur G invariante à gauche, nous pouvons alors l'identifier à un élément de \mathfrak{g}^* que nous noterons aussi ω . La différentielle extérieure d sur \mathfrak{g}^* est donnée par :

$$d\omega(X, Y) = -\omega([X, Y]) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \quad (1.5)$$

Considérons une base $\{X_1, \dots, X_n\}$ de \mathfrak{g} et sa base duale $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ de \mathfrak{g}^* . Si $\{C_{ij}^k\}$ sont les constantes de structure de \mathfrak{g} sur cette base, l'équation (1.5), nous donne les formes de Maurer-Cartan $\{d\omega^k \in \bigwedge^2 \mathfrak{g}^* : 1 \leq k \leq n\}$:

$$d\omega^k = -\frac{1}{2}C_{ij}^k \omega^i \wedge \omega^j \quad k = 1, \dots, n.$$

Un calcul direct permet de vérifier que la condition de Jacobi est équivalente à

$$d^2\omega^k = 0 \quad k = 1, \dots, n.$$

1.8.2 Structures symplectiques et de contact

Soit G un groupe de Lie de dimension paire $2n$ et \mathfrak{g} son algèbre de Lie. Une forme symplectique ω est une forme de degré 2 vérifiant

1. $d\omega = 0$,
2. et $\omega^n = \omega \wedge \omega \cdots \wedge \omega \neq 0$.

Rappelons que $d\omega$ est une forme de degré 3 qui est donnée par

$$d\omega(X, Y, Z) = \omega([X, Y], Z) + \omega([Y, Z], X) + \omega([Z, X], Y). \quad (1.6)$$

Soit G un groupe de Lie de dimension impaire $2n + 1$ et \mathfrak{g} son algèbre de Lie. Une forme $\omega \in \mathfrak{g}^*$ est dite de contact si elle vérifie :

$$\omega \wedge (\wedge^n d\omega) \neq 0.$$

1.8.3 Structures complexes sur une algèbre de Lie

Soit G un groupe de Lie réel de dimension paire et \mathfrak{g} son algèbre de Lie.

Définition 15 Une structure complexe sur G est un endomorphisme J tel que :

1. $J^2 = -Id$,
2. $N(J)(X, Y) = [J(X), J(Y)] - [X, Y] - J([J(X), Y]) - J([X, J(Y)]) = 0 \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$
(condition de Nijenhuis).

Les algèbres de Lie nilpotentes munies d'une structure complexe sont entièrement déterminées pour les dimensions inférieures ou égales à 6 (voir [43] et [46]). Dans le cas général, le seul résultat concerne la classe des algèbres de Lie filiformes. Rappelons qu'une algèbre de Lie \mathfrak{g} est dite filiforme si son nilindice est maximal, c'est-à-dire, s'il est égal à $\dim(\mathfrak{g}) - 1$.

Proposition 3 [30] Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie filiforme de dimension paire alors elle n'admet pas de structures complexes.

Dans [30], on montre dans un premier temps la non-existence de structures complexes sur l'algèbre de Lie filiforme L_{2n} ($n \geq 2$) définie dans la base $\{X_0, X_1, \dots, X_{2n-1}\}$ par :

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq 2n-2, \\ [X_i, X_j] &= 0, \quad i, j \neq 0 \end{aligned}$$

On généralise ensuite ce résultat à toute algèbre de Lie filiforme \mathfrak{g} de dimension $2n$ en remarquant que l'existence d'une structure complexe implique une décomposition en sous-algèbres $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ où \mathfrak{g}_1 et \mathfrak{g}_2 sont de dimension n . Une telle décomposition est impossible dans L_{2n} et donc dans toute déformation de cette algèbre. Comme toute algèbre de Lie filiforme de dimension $2n$ est une déformation de L_{2n} , on en déduit le résultat.

Cette proposition a ensuite été démontrée dans [19]. L'approche est tout à fait différente et repose sur la notion de structures complexes généralisées. Nous allons utiliser cette approche pour examiner l'existence de structures complexes sur d'autres classes d'algèbres de Lie nilpotentes.

1.9 Invariants

Les invariants de la représentation coadjointe sont appelés invariants de Casimir généralisés. Pour le calcul de ces invariants, nous utiliserons une méthode fréquemment employée dans la bibliographie qui ramène ce problème à la résolution d'un système d'équations en dérivées partielles de premier ordre. Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie et $\mathcal{B} = \{X_1, \dots, X_n\}$ une base de \mathfrak{g} , on considère les variables $\{x_1, \dots, x_n\}$ de \mathfrak{g}^* associées à la base duale de \mathcal{B} . Si les $\{C_{ij}^k\}$ sont les constantes de structure de \mathfrak{g} dans \mathcal{B} , on définit alors les opérateurs différentiels

$$\hat{X}_i = -C_{ij}^k x_k \partial_{x_j} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n.$$

Une fonction $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*)$ est un invariant de \mathfrak{g} si et seulement s'il vérifie le système d'équations :

$$\hat{X}_i F(x_1, \dots, x_n) = -C_{ij}^k x_k \partial_{x_j} F(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (1.7)$$

L'ensemble maximal des solutions de ce système fonctionnellement indépendantes s'appelle l'ensemble fondamental d'invariants. Le cardinal de l'ensemble fondamental d'invariants, que l'on note $\mathcal{N}(\mathfrak{g})$, est donné par la formule de Beltrami-Blasi :

$$\mathcal{N}(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g} - \text{rang}(A(\mathfrak{g})) \quad (1.8)$$

où $A(\mathfrak{g})$ est la matrice antisymétrique :

$$A(\mathfrak{g}) = \begin{pmatrix} 0 & C_{12}^k x_k & \cdots & C_{1n}^k x_k \\ -C_{12}^k x_k & 0 & \cdots & C_{2n}^k x_k \\ \vdots & & \ddots & \\ -C_{1,n-1}^k x_k & \cdots & 0 & C_{n-1,n}^k x_k \\ -C_{1n}^k x_k & \cdots & -C_{n-1,n}^k x_k & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est souvent convenable d'écrire cette formule dans le langage des formes différentielles. Soit $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ la base duale de \mathcal{B} , on considère alors le sous-espace linéaire $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ de $\bigwedge^2 \mathfrak{g}^*$ engendré par les formes de Maurer-Cartan $d\omega_i$ de \mathfrak{g} . Pour tout $\omega = a^i d\omega_i$ de $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$, il existe un entier $j_0(\omega) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\bigwedge_{j_0(\omega)} \omega \neq 0, \quad \bigwedge_{j_0(\omega)+1} \omega \equiv 0. \quad (1.9)$$

De plus, $r(\omega) = 2j_0(\omega)$ est le rang de la 2-forme ω . On définit

$$j_0(\mathfrak{g}) = \max \{j_0(\omega) \mid \omega \in \mathcal{L}(\mathfrak{g})\}. \quad (1.10)$$

Cette quantité $j_0(\mathfrak{g})$ est un invariant de \mathfrak{g} [16] et $\text{rang}(A(\mathfrak{g})) = 2j_0(\mathfrak{g})$. On en déduit que :

$$\mathcal{N}(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g} - 2j_0(\mathfrak{g}). \quad (1.11)$$

Chapitre 2

Classification des algèbres dont le nilradical est Q_{2n}

Šnobl et Winternitz ont déterminé les algèbres de Lie dont le nilradical est isomorphe à l'algèbre filiforme L_n . Dans leur travail cette algèbre est notée $\mathfrak{n}_{n,1}$ et elle est définie dans la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ par

$$[e_i, e_n] = e_{i-1} \quad i = 2, \dots, n-1.$$

Théorème 8 [48] *Soit \mathfrak{r} une algèbre de Lie résoluble sur un corps $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ et ayant comme nilradical $\mathfrak{n}_{n,1}$. Elle est alors isomorphe à l'une des algèbres suivantes :*

1. si $\dim \mathfrak{r} = n + 1$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_{n+1,1} : \\ [f, e_i] &= (n - 2 + \beta)e_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ [f, e_n] &= e_n. \end{aligned}$$

$$\mathfrak{r}_{n+1,2} : \\ [f, e_i] = e_i, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$\mathfrak{r}_{n+1,3} : \\ [f, e_i] = (n - i)e_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ [f, e_n] = e_n + e_{n-1}.$$

$$\mathfrak{r}_{n+1,4} : \\ [f, e_i] = e_i + \sum a^{i-k+1}e_k, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

où au moins l'un des paramètres a^j est non nul, soit a^{j_0} le premier paramètre non nul,

si $F = \mathbb{C}$ alors $a^{j_0} = 1$, si $F = \mathbb{R}$ alors $a^{j_0} = 1$ quand j_0 est pair et $a^{j_0} = \pm 1$ quand j_0 est impair.

2. si $\dim \mathfrak{r} = n + 2$:

$$\mathfrak{r}_{n+2,1} : \\ [f_1, e_i] = (n - 1 - i)e_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad [f_2, e_i] = e_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ [f_1, e_n] = e_n.$$

De façon à compléter cette étude à toutes les algèbres de Lie filiformes naturellement graduées, on a procédé de même avec les algèbres Q_n où $n = 2m$ et $m \geq 3$.

2.1 Algèbres résolubles ayant un nilradical donné

Toute algèbre de Lie résoluble \mathfrak{r} se décompose de la façon suivante

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{t} \overrightarrow{\oplus} \mathfrak{n} \quad (2.1)$$

où

$$[\mathfrak{t}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}, [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}, [\mathfrak{t}, \mathfrak{t}] \subset \mathfrak{n}, \quad (2.2)$$

de plus, \mathfrak{n} est le nilradical de \mathfrak{r} et $\overrightarrow{\oplus}$ dénote le produit semi-direct. Dans [39], on démontre que la dimension du nilradical vérifie l'inégalité

$$\dim \mathfrak{n} \geq \frac{1}{2} \dim \mathfrak{r}. \quad (2.3)$$

En appliquant l'identité de Jacobi aux éléments $X \in \mathfrak{t}, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{n}$, on a

$$[X, [Y_1, Y_2]] + [Y_2, [X_1, Y_1]] + [Y_1, [Y_2, X]] = 0. \quad (2.4)$$

L'application linéaire $ad(X)$ est donc une dérivation de l'algèbre de Lie nilpotente \mathfrak{n} . Comme $X \notin \mathfrak{n}$, ces dérivations ne peuvent pas être nilpotentes. De plus, si $\{X_1, \dots, X_n\}$ est une base de \mathfrak{t} et si on considère une combinaison non triviale $\alpha^1 ad(X_1) + \dots + \alpha^n ad(X_n)$ avec $(\alpha^1, \dots, \alpha^n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, alors

$$(\alpha^1 ad(X_1) + \dots + \alpha^n ad(X_n))^k \neq 0, \quad k \geq 1, \quad (2.5)$$

ce qui veut dire que la matrice $\alpha^1 ad(X_1) + \dots + \alpha^n ad(X_n)$ n'est pas nilpotente. Quand les éléments X_1, \dots, X_n vérifient cette propriété, on dira qu'ils sont nil-indépendants [39]. On en déduit que la dimension $\dim \mathfrak{t}$ est bornée par le nombre maximal de dérivations nil-indépendantes du nilradical.

Ainsi, le problème de classification des algèbres de Lie résolubles ayant un nilradical fixe \mathfrak{n} se ramène à trouver toutes les extensions non-équivalentes de \mathfrak{n} déterminées par l'ensemble des dérivations nil-indépendantes. L'équivalence des extensions est régie par les transformations du type

$$X_i \mapsto a_{ij} X_j + b_{ik} Y_k, \quad Y_k \mapsto R_{kl} Y_l, \quad (2.6)$$

où (a_{ij}) est une matrice de dimension n inversible, (b_{ik}) est une matrice $n \times \dim \mathfrak{n}$ et (R_{kl}) est un automorphisme du nilradical \mathfrak{n} .

De cette façon, on obtient dans [48] les algèbres de Lie résolubles dont le nilradical est \mathfrak{L}_n . Pour compléter la classification des algèbres de Lie résolubles qui ont un nilradical naturellement gradué et filiforme, on procède de même avec l'algèbre nilpotente Q_{2n} où $n \geq 3$. Nous rappelons que cette algèbre est définie dans la base $\{X_1, \dots, X_{2n}\}$ par les crochets

$$\begin{aligned} [X_1, X_i] &= X_{i+1}, & 2 \leq i \leq 2n-2 \\ [X_k, X_{2n+1-k}] &= (-1)^k X_{2n}, & 2 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

2.2 Dérivations de l'algèbre Q_{2n}

Nous allons, dans ce paragraphe, calculer les dérivations de Q_{2n} afin d'obtenir toutes les extensions de cette algèbre par dérivations non-nilpotentes.

Proposition 4 *Toute dérivation externe f de l'algèbre Q_{2n} peut s'écrire dans la base $\{X_1, \dots, X_{2n}\}$ de la façon suivante :*

$$\begin{aligned} f(X_1) &= \lambda_1 X_1 + f_1^{2n} X_{2n} \\ f(X_2) &= \lambda_2 X_2 + \sum_{k=2}^{n-1} f_2^{2k+1} X_{2k+1} \\ f(X_{2+t}) &= (t\lambda_1 + \lambda_2) X_{2+t} + \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{2n-3-t}{2} \rfloor} f_2^{2k+1} X_{2k+1+t}, \quad 1 \leq t \leq 2n-4 \\ f(X_{2n-1}) &= ((2n-3)\lambda_1 + \lambda_2) X_{2n-1} \\ f(X_{2n}) &= ((2n-3)\lambda_1 + 2\lambda_2) X_{2n}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\dim \text{Der}(Q_{2n}) / \text{IDer}(Q_{2n}) = n + 1$.

Démonstration. Soit $f \in \text{Der}(Q_{2n})$, pour tout $i \in \{1, \dots, 2n\}$, on note $f(X_i) = \sum_{j=1}^{2n} f_i^j X_j$, les coefficients f_i^j étant des scalaires. Comme l'image d'un élément du centre par une dérivation est aussi un élément du centre, on a

$$f(X_{2n}) = f_{2n}^{2n} X_{2n}. \quad (2.7)$$

La condition

$$[f(X_1), X_2] + [X_1, f(X_2)] = f(X_3) \quad (2.8)$$

nous donne

$$f(X_3) = (f_1^1 + f_2^2) X_3 + \sum_{k=3}^{2n-2} f_2^k X_{k+1} - f_1^{2n} X_{2n}, \quad (2.9)$$

et puisque $X_{2+t} = \text{ad}(X_1)^t(X_2)$ pour $1 \leq t \leq 2n-3$, on obtient par induction

$$f(X_{2+t}) = (t f_1^1 + f_2^2) X_{2+t} + \sum_{k=3}^{2n-1-t} f_2^k X_{k+t} + (-1)^t f_1^{2n-1-t} X_{2n}. \quad (2.10)$$

En imposant

$$[f(X_1), X_{2n-1}] + [X_1, f(X_{2n-1})] = 0$$

on déduit $f_1^2 = 0$. On remplace f_1^2 dans l'équation 2.10 avec $t = 2n-3$ et alors

$$f(X_{2n-1}) = ((2n-3)f_1^1 + f_2^2) X_{2n-1}. \quad (2.11)$$

On impose que f est une dérivation sur le crochet $[X_2, X_{2+t}]$ pour $1 \leq t \leq 2n-4$

$$[f(X_2), X_{2+t}] + [X_2, f(X_{2+t})] = f_2^{2n-1-t} (1 - (-1)^t) X_{2n} + f_2^1 X_{3+t} = 0,$$

et donc

$$\begin{aligned} f_2^1 &= 0 \\ f_2^{2n-1-t} &= 0, \quad t = 1, 3, \dots, 2n-5. \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour $k = 2, \dots, n$ on a

$$\begin{aligned} f(X_{2n}) &= (-1)^k f([X_k, X_{2n+1-k}]) \\ &= (-1)^k ([f(X_k), X_{2n+1-k}] + [X_k, f(X_{2n+1-k})]) \\ &= ((k-2)f_1^1 + 2f_2^2) X_{2n} + ((2n-1-k)f_1^1 + 2f_2^2) X_{2n} \\ &= ((2n-3)f_1^1 + 2f_2^2) X_{2n}. \end{aligned}$$

Les crochets restants n'apportent pas de nouvelles conditions sur les coefficients f_i^j , l'expression générale d'une dérivation f est donc donnée par :

$$\begin{aligned} f(X_1) &= f_1^1 X_1 + \sum_{k=3}^{2n} f_1^k X_{2n} \\ f(X_2) &= f_2^2 X_2 + \sum_{k=2}^{n-1} f_2^{2k+1} X_{2k+1} + f_2^{2n} X_{2n} \\ f(X_{2+t}) &= (t f_1^1 + f_2^2) X_{2+t} + \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{2n-3-t}{2} \rfloor} f_2^{2k+1} X_{2k+1+t} + (-1)^t f_1^{2n-1-t} X_{2n}, \quad 1 \leq t \leq 2n-4 \\ f(X_{2n-1}) &= ((2n-3)f_1^1 + f_2^2) X_{2n-1} \\ f(X_{2n}) &= ((2n-3)f_1^1 + 2f_2^2) X_{2n}. \end{aligned}$$

Il en résulte que l'espace vectoriel $Der(Q_{2n})$ est engendré par les $3n$ dérivations suivantes

$$\begin{aligned} F_1^1(X_1) &= X_1, & F_1^1(X_j) &= (j-2)X_j & 3 \leq j \leq 2n-1, & F_1^1(X_{2n}) &= (2n-3)X_{2n}, \\ F_2^2(X_2) &= X_2, & F_2^2(X_j) &= X_j & 3 \leq j \leq 2n-1, & F_2^2(X_{2n}) &= 2X_{2n}, \\ F_1^k(X_1) &= X_k, & F_1^k(X_{2n+2-k}) &= (-1)^k X_{2n} & 3 \leq j \leq 2n-1, & 3 \leq k \leq 2n-1, \\ F_1^{2n}(X_1) &= X_{2n}, \\ F_2^{2k+1}(X_2) &= X_{2k+1}, & F_2^{2k+1}(X_{2+t}) &= X_{2k+1+t}, & 1 \leq t \leq 2(n-1-k), & 2 \leq k \leq n-1 \\ F_1^{2n}(X_2) &= X_{2n}, \end{aligned}$$

parmi lesquels il y a $2n-1$ dérivations internes, en effet

$$adX_1 = F_2^3, \quad adX_2 = F_1^3, \quad adX_k = F_1^k \quad (3 \leq k \leq 2n-2), \quad adX_{2n-1} = F_2^{2n}.$$

Ainsi l'espace $Der(Q_{2n})/IDer(Q_{2n})$ est engendré par $n+1$ éléments correspondants aux dérivations externes $\{F_1^1, F_1^{2n}, F_2^2, F_2^{2k+1}\}_{2 \leq k \leq n-1}$.

Corollaire 1 *Toute dérivation externe non-nilpotente F de Q_{2n} est donnée par*

$$F = \alpha_1 F_1^1 + \alpha_2 F_2^2 + \sum_{k=2}^{n-1} \beta_k F_2^{2k+1} + \beta_n F_1^{2n} \quad (2.12)$$

avec $\alpha_1 \neq 0$ ou $\alpha_2 \neq 0$.

2.3 Algèbres de Lie résolubles ayant Q_{2n} pour nilradical

Comme nous l'avons déjà indiqué, nous allons utiliser les résultats antérieurs pour déterminer les algèbres réelles résolubles dont le nilradical est Q_{2n} .

Proposition 5 *Toute algèbre de Lie réelle résoluble, non-nilpotente et dont le nilradical est isomorphe à Q_{2n} , est de dimension $2n+1$ ou bien $2n+2$.*

Du corollaire 1, on déduit immédiatement cette proposition.

Proposition 6 *Toute algèbre de Lie réelle résoluble de dimension $2n+1$ ayant pour nilradical Q_{2n} est isomorphe à l'une des algèbres suivantes :*

1. $\mathfrak{r}_{2n+1}(\lambda_2)$:

$$\begin{aligned} [X_1, X_k] &= X_{k+1}, & 2 \leq k \leq 2n-2 \\ [X_k, X_{2n+1-k}] &= (-1)^k X_{2n}, & 2 \leq k \leq n \\ [Y, X_1] &= X_1, \\ [Y, X_k] &= (k-2+\lambda_2)X_k, & 2 \leq k \leq 2n-1 \\ [Y, X_{2n}] &= (2n-3+2\lambda_2)X_{2n}. \end{aligned}$$

2. $\mathfrak{r}_{2n+1}(2-n, \varepsilon)$

$$\begin{aligned} [X_1, X_k] &= X_{k+1}, & 2 \leq k \leq 2n-2 \\ [X_k, X_{2n+1-k}] &= (-1)^k X_{2n}, & 2 \leq k \leq n \\ [Y, X_1] &= X_1 + \varepsilon X_{2n}, & \varepsilon = -1, 0, 1 \\ [Y, X_k] &= (k-n)X_k, & 2 \leq k \leq 2n-1 \\ [Y, X_{2n}] &= X_{2n}. \end{aligned}$$

3. $\mathfrak{r}_{2n+1}(\lambda_2^5, \dots, \lambda_2^{2n-1})$

$$\begin{aligned} [X_1, X_k] &= X_{k+1}, & 2 \leq k \leq 2n-2 \\ [X_k, X_{2n+1-k}] &= (-1)^k X_{2n}, & 2 \leq k \leq n \\ [Y, X_{2+t}] &= X_{2+t} + \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{2n-3-t}{2} \rfloor} \lambda_2^{2k+1} X_{2k+1+t}, & 0 \leq t \leq 2n-6 \\ [Y, X_{2n-k}] &= X_{2n-k}, & k = 1, 2, 3 \\ [Y, X_{2n}] &= 2X_{2n}. \end{aligned}$$

De plus, le premier paramètre λ_2^{2k+1} non-nul est égal à 1.

Démonstration. La structure d'une algèbre résoluble de dimension $2n+1$ et ayant pour nilradical Q_{2n} , est déterminée par l'action d'une dérivation non-nilpotente $F = \alpha_1 F_1^1 + \alpha_2 F_2^2 + \sum_k \beta_k F_2^{2k+1} + \beta_n F_1^{2n}$ sur le nilradical. Nous allons envisager toutes les possibilités en fonction des valeurs de α_1 et α_2 , l'un des deux étant non-nul.

1. Soit $\alpha_1 \neq 0$. En multipliant si nécessaire F par un certain coefficient, on peut supposer $\alpha_1 = 1$. En faisant un changement de base du type

$$\begin{aligned} X'_{2+t} &= X_{2+t} + \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{2n-3-t}{2} \rfloor} \gamma_k X_{2k+1+t}, & 0 \leq t \leq 2n-4 \\ X'_i &= X_i, & i = 1, 2n-1, 2n, \end{aligned} \quad (2.13)$$

on ramène β_{n-1} à zéro, puis β_{n-2} et ainsi de suite jusqu'à β_2 . La dérivation F est alors donnée par

$$F' = F_1^1 + \alpha_2 F_2^2 + \beta_n F_1^{2n}. \quad (2.14)$$

Si de plus, $\alpha_2 \neq 2-n$, le changement de base

$$X'_1 = X_1 + \frac{\beta_n}{2(n-2+\alpha_2)} X_{2n} \quad (2.15)$$

nous permet de supposer $\beta_n = 0$. Sur la base $\{X_1, \dots, X_{2n}\}$ de Q_{2n} , F est la dérivation diagonale

$$F = \text{diag}(1, \alpha_2, 1+\alpha_2, \dots, 2n-3+\alpha_2, 2n-3+2\alpha_2). \quad (2.16)$$

On obtient alors les algèbres de Lie $\mathfrak{r}_{2n+1}(\alpha_2)$.

Par ailleurs, si $\alpha_2 = 2-n$ et $\beta_n \neq 0$, alors ce coefficient ne peut pas être éliminé. Sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut alors poser $\beta_n = 1$ si $\beta_n > 0$ ou $\beta_n = -1$ si $\beta_n < 0$. Sur $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, on peut toujours prendre β_n égal à 1. Ceci nous ramène aux algèbres de Lie $\mathfrak{r}_{2n+1}(2-n, \pm 1)^1$.

¹Les algèbres de Lie $\mathfrak{r}_{2n+1}(2-n, -1)$ et $\mathfrak{r}_{2n+1}(2-n, 1)$ sont isomorphes sur \mathbb{C} .

Enfin, si $\alpha_2 = 2 - n$ et $\beta_n = 0$, on obtient l'algèbre de Lie $\mathfrak{r}_{2n+1}(2 - n, 0)$.

2. Supposons maintenant $\alpha_1 = 0$. Comme $\alpha_2 \neq 0$, en faisant un changement d'échelle, on peut prendre $\alpha_2 = 1$. Le changement de base

$$X'_1 = X_1 - \frac{1}{2}\beta_n X_{2n} \quad (2.17)$$

nous permet de supposer β_n égal à zéro. Il est impossible d'éliminer les paramètres β_k ($2 \leq k \leq n - 1$), et donc, si l'un d'eux est non-nul, la dérivation F n'est pas diagonale. Cependant, en faisant un changement d'échelle, on peut supposer que le premier paramètre β_k non-nul est égal à 1. Ce cas nous donne ainsi la famille d'algèbres $\mathfrak{r}_{2n+1}(\beta_2, \dots, \beta_{n-1})$.

Finalement, si on ajoute deux éléments nil-indépendents de $Der(Q_{2n})$, un seul cas est possible.

Proposition 7 *Pour tout $n \geq 3$, il y a une seule algèbre de Lie résoluble \mathfrak{r}_{2n+2} de dimension $2n + 2$ dont le nilradical est isomorphe à Q_{2n} :*

$$\begin{aligned} [X_1, X_k] &= X_{k+1}, & 2 \leq k \leq 2n - 2 \\ [X_k, X_{2n+1-k}] &= (-1)^k X_{2n}, & 2 \leq k \leq n \\ [Y_1, X_k] &= k X_k & 1 \leq k \leq 2n - 1 \\ [Y_1, X_{2n}] &= (2n + 1) X_{2n}, \\ [Y_2, X_k] &= X_k, & 2 \leq k \leq 2n - 1 \\ [Y_2, X_{2n}] &= 2X_{2n}. \end{aligned}$$

2.4 Invariants de Casimir Généralisés

Nous allons calculer les invariants de Casimir des algèbres que nous venons d'obtenir.

Proposition 8 *Pour tout $n \geq 3$, l'algèbre de Lie nilpotente Q_{2n} possède exactement 2 opérateurs de Casimir, donnés par la symétrisation des fonctions suivantes :*

$$\begin{aligned} I_1 &= x_{2n} \\ I_2 &= x_1 x_{2n} + x_3 x_{2n-1} + \sum_{k=4}^n (-1)^{k+1} x_k x_{2n+2-k} + \frac{(-1)^n}{2} x_{n+1}^2. \end{aligned}$$

Démonstration. Les équations de Maurer-Cartan de l'algèbre Q_{2n} sont

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= d\omega_2 = 0, \\ d\omega_{j+1} &= \omega_1 \wedge \omega_j, \quad 2 \leq j \leq 2n - 2 \\ d\omega_{2n} &= \sum_{k=2}^n (-1)^k \omega_k \wedge \omega_{2n+1-k}. \end{aligned}$$

La forme $\omega = d\omega_{2n}$ est de rang maximal et donc $j_0(Q_{2n}) = n - 1$. D'après la formule (1.11), on a $\mathcal{N}(Q_{2n}) = 2$. Il est clair que X_{2n} est un opérateur de Casimir puisqu'il engendre le centre. Afin d'obtenir un deuxième invariant indépendant, on résout le système (1.7) :

$$\begin{aligned} \hat{X}_1 F &:= \sum_{j=2}^{2n-2} x_{j+1} \frac{\partial F}{\partial x_j} = 0 \\ \hat{X}_j F &:= -x_{j+1} \frac{\partial F}{\partial x_1} + (-1)^j x_{2n} \frac{\partial F}{\partial x_{2n+1-j}} = 0 \\ \hat{X}_{2n-1} F &:= -x_{2n} \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \end{aligned}$$

où $2 \leq j \leq 2n - 2$. L'équation (2.4) implique $\frac{\partial F}{\partial x_2} = 0$. Pour chaque $2 \leq j \leq 2n - 2$, la fonction $x_1 x_{2n} + (-1)^j x_{j+1} x_{2n+1-j}$ est une solution de l'équation (2.4). On considère alors la fonction $C = x_1 x_{2n} + x_3 x_{2n-1} + \sum_{k=4}^n (-1)^{k+1} x_k x_{2n+2-k} + \frac{(-1)^n}{2} x_{n+1}^2$. Comme pour tout $j \geq 3$,

$$x_{j+2} \frac{\partial C}{\partial x_{j+1}} + x_{2n+1} \frac{\partial C}{\partial x_{2n-j}} = 0. \quad (2.18)$$

la fonction C vérifie l'équation (2.4), ainsi C est un invariant de l'algèbre.

L'opérateur de Casimir s'obtient en remplaçant x_i par X_i . On remarque que C et sa symétrisation coïncident.

Théorème 9 *Les algèbres de Lie $\mathfrak{r}(\lambda_2)$, $\mathfrak{r}(2-n, \varepsilon)$ et $\mathfrak{r}(\lambda_2^5, \dots, \lambda_2^{2n-1})$ ont un seul invariant que l'on peut choisir de la façon suivante :*

1. $\mathfrak{r}_{2n+1}(\lambda_2)$

$$J = I_2 x_{2n}^{-\alpha}, \quad \alpha = \frac{2n-2+2\lambda_2}{2n-3+2\lambda_2}, \quad (2.19)$$

2. $\mathfrak{r}_{2n+1}(2-n, \varepsilon)$

$$J = \frac{1}{x_{2n}^2} I_2 - \varepsilon \ln(x_{2n}), \quad (2.20)$$

3. $\mathfrak{r}_{2n+1}(\lambda_2^5, \dots, \lambda_2^{2n-1})$

$$J = \frac{I_2}{x_{2n}}, \quad (2.21)$$

Démonstration. D'après les équations de Maurer-Cartan de ces algèbres de Lie, on a $\mathcal{N}(\mathfrak{r}) = 1$. De plus, la dérivation F qui définit l'extension de Q_{2n} agit de façon non triviale sur le centre X_{2n} , les invariants sont alors indépendants de la variable y correspondante au générateur Y . Pour trouver les invariants des algèbres résolubles, il suffit de résoudre l'équation $\hat{Y}F = 0$, en écrivant F en fonction des invariants I_1 et I_2 de la proposition 8.

1. $\mathfrak{r}(\lambda_2)$.

L'équation à résoudre est

$$\hat{Y}F := x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \sum_{k=2}^{2n-1} (k-2+\lambda_2) x_k \frac{\partial F}{\partial x_k} + (2n-3+2\lambda_2) x_{2n} \frac{\partial F}{\partial x_{2n}} = 0. \quad (2.22)$$

Il est facile de vérifier

$$\begin{aligned} \hat{Y}(I_1) &= (2n-3+2\lambda_2) I_1 \\ \hat{Y}(I_2) &= (2n-2+2\lambda_2) I_2. \end{aligned}$$

Les opérateurs de Casimir du nilradical sont alors des semi-invariants de cette extension. Notons que ceci est toujours vrai lorsque la dérivation est diagonale [41, 13, 48, 15]. On remarque que pour $2n-3+2\lambda_2 = 0$, $J = x_{2n}$ est un invariant de l'algèbre, et pour $2n-2+2\lambda_2 = 0$ la fonction I_2 est un opérateur de Casimir de $\mathfrak{r}_{2n+1}(2-n)$. Dans le cas contraire, I_1 et I_2 ne sont pas des solutions

de (2.22). On considère alors I_1 et I_2 comme de nouvelles variables u et v , l'équation (2.22) s'écrit alors de la façon suivante

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{(2n-2+2\lambda_2)v}{(2n-3+2\lambda_2)u} \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0, \quad (2.23)$$

La solution générale est alors

$$\Phi \left(\frac{u^{2n-2+2\lambda_2}}{v^{2n-3+2\lambda_2}} \right). \quad (2.24)$$

Il en résulte que les invariants de $\mathfrak{r}_{2n+1}(\lambda_2)$ sont donnés par

$$J = I_2 x_{2n}^{-\alpha} \text{ où } \alpha = \left(\frac{2n-2+2\lambda_2}{2n-3+2\lambda_2} \right). \quad (2.25)$$

2. $\mathfrak{r}_{2n+1}(2-n, \epsilon)$.

Dans ce cas on doit résoudre

$$\widehat{Y}F := (x_1 + \varepsilon x_{2n}) \frac{\partial F}{\partial x_1} + \sum_{k=2}^{2n-1} (k-n) x_k \frac{\partial F}{\partial x_k} + x_{2n} \frac{\partial F}{\partial x_{2n}} = 0. \quad (2.26)$$

Comme F n'est pas diagonale quand $\varepsilon \neq 0$, $\widehat{Y}(I_2)$ n'est pas proportionnelle à I_2 . Cependant, si on considère $I_2 x_{2n}^{-2}$ à la place de I_2 , on a

$$\widehat{Y}(I_2 x_{2n}^{-2}) = \varepsilon.$$

De plus $\widehat{Y}(\ln(x_{2n})) = 1$, et donc, en ajoutant le logarithme $-\varepsilon \ln(x_{2n})$, on obtient la fonction

$$I_2 x_{2n}^{-2} - \varepsilon \ln(x_{2n}) \quad (2.27)$$

qui vérifie l'équation (2.26). C'est donc un invariant de l'algèbre $\mathfrak{r}_{2n+1}(2-n, \epsilon)$.

3. $\mathfrak{r}_{2n+1}(\lambda_2^5, \dots, \lambda_2^{2n-1})$.

Pour cette famille d'algèbres, l'équation à résoudre est

$$\widehat{Y}F := \sum_{k=2}^{2n-1} x_k \frac{\partial F}{\partial x_k} + 2x_{2n} \frac{\partial F}{\partial x_{2n}} = 0. \quad (2.28)$$

Le calcul direct nous donne

$$\begin{aligned} \widehat{Y}(I_1) &= 2I_1 \\ \widehat{Y}(I_2) &= 2I_2. \end{aligned}$$

Par un raisonnement analogue à (2.23), on en déduit que l'on peut choisir l'invariant

$$J = \frac{I_2}{I_1}. \quad (2.29)$$

Proposition 9 *Pour tout $n \geq 3$, l'algèbre de Lie \mathfrak{r}_{2n+2} ne possède aucun invariant.*

Démonstration. Soit $\{\omega_1, \dots, \omega_{2n}, \theta_1, \theta_2\}$ la base duale de $\{X_1, \dots, X_{2n}, Y_1, Y_2\}$, les formes de Maurer-Cartan sont alors données par

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \omega_1 \wedge \theta_1 \\ d\omega_2 &= 2\omega_2 \wedge \theta_1 + \omega_2 \wedge \theta_2 \\ d\omega_k &= \omega_1 \wedge \omega_{k-1} + k\omega_k \wedge \theta_1 + \omega_k \wedge \theta_2, \quad 3 \leq k \leq 2n-1 \\ d\omega_{2n} &= \sum_{k=2}^n (-1)^k \omega_k \wedge \omega_{2n+1-k} + (2n+1)\omega_{2n} \wedge \theta_1 + 2\omega_{2n} \wedge \theta_2 \\ d\theta_1 &= d\theta_2 = 0. \end{aligned}$$

On considère la forme $\xi = d\omega_1 + d\omega_{2n}$ puis on calcule son n -ième produit extérieur

$$\bigwedge^n \xi = \pm (2n)! \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{2n} \wedge \theta_1 \wedge \theta_2 \neq 0. \quad (2.30)$$

D'après la formule (1.11), cette algèbre de Lie ne possède pas d'invariants.

2.5 Propriétés géométriques des algèbres de Lie résolubles dont le nilradical est Q_{2n}

De la démonstration de la dernière proposition, on déduit que l'algèbre \mathfrak{r}_{2n+2} est munie d'une structure symplectique, il est donc naturel de se demander si les algèbres de dimension $2n+1$ ayant Q_{2n} pour nilradical, ont d'autres propriétés géométriques. En particulier, on étudie l'existence de forme de contact de ces algèbres, c'est-à-dire, des formes $\omega \in \mathfrak{r}_{2n+1}^*$ telles que $\omega \wedge (\bigwedge^n d\omega) \neq 0$. Ce type de structures géométriques a de l'importance dans l'analyse des équations différentielles et des systèmes dynamiques [35, 45].

Proposition 10 *Soit $n \geq 3$. Toute algèbre de Lie \mathfrak{r} dont le nilradical est isomorphe à Q_{2n} , excepté $\mathfrak{r}_{2n+1}(2-n, 0)$, est munie d'une forme de contact.*

Démonstration. Soit $\{\omega_1, \dots, \omega_{2n}, \theta\}$ la base duale de $\{X_1, \dots, X_{2n}, Y\}$.

1. Les équations de Maurer-Cartan de l'algèbre $\mathfrak{r}_{2n+1}(\lambda_2)$ sont

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \omega_1 \wedge \theta \\ d\omega_2 &= \lambda_2 \omega_2 \wedge \theta \\ d\omega_k &= \omega_1 \wedge \omega_{k-1} + (k-2+\lambda_2)\omega_k \wedge \theta, \quad 3 \leq k \leq 2n-1 \\ d\omega_{2n} &= \sum_{k=2}^n (-1)^k \omega_k \wedge \omega_{2n+1-k} + (2n-3+2\lambda_2)\omega_{2n} \wedge \theta \\ d\theta &= 0. \end{aligned}$$

On pose $\omega = \omega_1 + \omega_{2n}$, et on calcule le produit extérieur

$$\omega \wedge \left(\bigwedge^n d\omega \right) = 2n(n-1)!(\lambda_2 + n-2)\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{2n} \wedge \theta \neq 0. \quad (2.31)$$

2. Les équations de Maurer-Cartan de l'algèbre $\mathfrak{r}_{2n+1}(2-n, \varepsilon)$ sont

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \omega_1 \wedge \theta \\ d\omega_2 &= \omega_2 \wedge \theta \\ d\omega_k &= \omega_1 \wedge \omega_{k-1} + (k-n)\omega_k \wedge \theta, \quad 3 \leq k \leq 2n-1 \\ d\omega_{2n} &= \sum_{k=2}^n (-1)^k \omega_k \wedge \omega_{2n+1-k} + \omega_{2n} \wedge \theta + \varepsilon \omega_1 \wedge \theta \\ d\theta &= 0. \end{aligned}$$

En prenant la forme $\omega = \omega_1 + \omega_{2n}$, on obtient

$$\omega \wedge \left(\bigwedge^n d\omega \right) = \varepsilon n! \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{2n} \wedge \theta. \quad (2.32)$$

Quand $\varepsilon \neq 0$, ω est une forme de contact. On peut facilement prouver que pour $\varepsilon = 0$ il n'existe pas de forme de contact.

3. Pour $\mathfrak{r}_{2n+1}(\lambda_2^5, \dots, \lambda_2^{2n-1})$, les équations de Maurer-Cartan sont compliquées à écrire car elles dépendent des paramètres λ_2^k . Cependant, pour trouver une forme de contact il suffit de considérer les équations suivantes :

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= 0 \\ d\omega_{2n} &= \sum_{k=2}^n (-1)^k \omega_k \wedge \omega_{2n+1-k} + 2\lambda_2 \omega_{2n} \wedge \theta \end{aligned}$$

La forme $\omega = \omega_1 + \omega_{2n}$ vérifie

$$\omega \wedge \left(\bigwedge^n d\omega \right) = 2n! \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{2n} \wedge \theta \neq 0. \quad (2.33)$$

Elle définit donc une forme de contact.

Dans [45], on démontre que les formes de contact α sur les variétés impliquent l'existence d'un champ de vecteur X tel que $\alpha(X) = 1$ et $X \lrcorner \alpha = 0$, appelé système dynamique correspondant à α . Pour les algèbres de Lie précédentes, il est donc possible de construire un système dynamique sans singularités [45]. Par contre, les algèbres de Lie résolubles dont le nilradical est $\mathfrak{n}_{n,1}$ ont un nombre d'invariants qui dépend de la dimension, ceci implique que pour les dimensions impaires, il n'existe pas de forme de contact [12]. La perte de cette structure est due au fait que la sous-algèbre de Heisenberg de Q_{2n} engendrée par $\{X_2, \dots, X_{2n}\}$ se contracte sur la sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{n}_{n,1}$.

Chapitre 3

Inexistence d'algèbres de Lie indécomposables non résolubles ayant un radical associé aux algèbres filiformes

Dans ce chapitre, on montre que la somme semi-directe $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \overrightarrow{\oplus}_R \mathfrak{r}$, d'une algèbre semi-simple \mathfrak{s} et d'une algèbre résoluble \mathfrak{r} par rapport à une représentation de \mathfrak{s} , qui ne se décompose pas en somme directe d'idéaux, ne peut pas avoir un radical \mathfrak{r} dont le nilradical soit une algèbre filiforme. Il en résulte que les algèbres filiformes ne présentent aucun intérêt dans l'étude des algèbres de Lie non résolubles. Plus précisément, on démontre que toute algèbre de Lie complexe de dimension supérieure ou égale à 7, ayant une sous-algèbre de Levi non triviale et un nilradical filiforme est nécessairement décomposable¹.

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \overrightarrow{\oplus}_R \mathfrak{r}$ une algèbre de Lie complexe indécomposable (c'est-à-dire qui ne s'écrit pas comme somme directe d'idéaux). Nous allons, tout d'abord, démontrer l'affirmation suivante.

Théorème 10 *Toute algèbre de Lie complexe \mathfrak{g} indécomposable et de dimension supérieure ou égale à 7, ayant une décomposition de Lévi $\mathfrak{s} \overrightarrow{\oplus}_R \mathfrak{r}$ non triviale, ne possède pas un radical filiforme.*

Par réduction, on verra qu'il suffit de démontrer cette proposition pour une sous-algèbre de Lévi de rang un.

Lemme 1 *Toute algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \overrightarrow{\oplus}_R \mathfrak{r}$ ayant un radical filiforme \mathfrak{r} se contracte sur une algèbre de Lie $\mathfrak{g}' = \mathfrak{s} \overrightarrow{\oplus}_R L_n$.*

Démonstration. Soit $\{X_1, \dots, X_m, X_{m+1}, \dots, X_{m+n}\}$ une base de \mathfrak{g} avec $\{X_1, \dots, X_m\}$ une base de \mathfrak{s} et $\{X_{m+1}, \dots, X_{m+n}\}$ une base de \mathfrak{r} . On note les constantes de structure de \mathfrak{g} par $\{C_{ij}^k\}_{1 \leq i, j, k \leq m+n}$. Comme

¹En dimension 6, il existe un contre-exemple trivial : $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \overrightarrow{\oplus}_{D_{1/2} + D_0} \mathfrak{h}_1$. Ceci est dû au fait que l'algèbre de Heisenberg est la seule algèbre de Lie filiforme en dimension 3.

le nilradical est filiforme, on peut prendre $X_{m+1}, X_{m+2} \in \mathfrak{r} - [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]$ et supposer, sans perte de généralité, que les crochets de $\{X_{m+1}, \dots, X_{n+m}\}$ sont donnés par

$$[X_{m+1}, X_{m+1+j}] = \lambda_{m+1+j} X_{m+2+j}, \quad 1 \leq j \leq n-2 \quad (3.1)$$

avec $\lambda_{m+1+j} \neq 0$ pour tout j . On considère le changement de base :

$$\begin{aligned} X'_i &= X_i, \quad 1 \leq i \leq m+1, \\ X'_i &= \frac{1}{\epsilon} X_i, \quad m+2 \leq i \leq n+m. \end{aligned}$$

Les nouveaux crochets de \mathfrak{g} sont :

$$\begin{aligned} [X'_i, X'_j] &= [X_i, X_j], \quad 1 \leq i < j \leq m+1 \\ [X'_i, X'_{m+j}] &= \frac{1}{\epsilon} [X_i, X_{m+j}] = \sum_{k=j}^n C_{i,m+j}^{m+k} X'_{m+k}, \quad 1 \leq i \leq m+1, \quad 2 \leq j \leq n, \\ [X'_{m+i}, X'_{m+j}] &= \frac{1}{\epsilon^2} [X'_{m+i}, X'_{m+j}], \quad 2 \leq i, j \leq n. \end{aligned}$$

On remarque alors que les crochets de \mathfrak{s} ne changent pas et que \mathfrak{s} agit de la même façon sur le radical. Par ailleurs, les crochets du nilradical sont :

$$\begin{aligned} [X'_{m+1}, X'_{m+i}] &= \lambda_{m+1+i} X'_{m+1+i}, \quad 2 \leq i \leq n-2, \\ [X'_{m+i}, X'_{m+j}] &= \frac{1}{\epsilon} \sum_{k=2}^n C_{m+i,m+j}^{m+k} X'_{m+k}, \quad 2 \leq i, j \leq n. \end{aligned}$$

En prenant $\epsilon \rightarrow \infty$, on obtient

$$[X'_{m+i}, X'_{m+j}] = 0, \quad 2 \leq i, j, k \leq n \quad (3.2)$$

On conclut ainsi que l'algèbre de Lie $\mathfrak{s} \overrightarrow{\oplus}_R L_n$ est une contraction d'Inönü-Wigner [34] de \mathfrak{g} .

D'après ce lemme, il suffit d'étudier le cas où le radical est isomorphe à L_n puisque le cas général s'obtient par déformation. On peut encore simplifier le problème grâce aux règles de ramification des représentations d'une algèbre semi-simple. Comme toute algèbre semi-simple complexe \mathfrak{s} possède une sous-algèbre isomorphe à $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, l'inclusion $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathfrak{s}$ induit

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \overrightarrow{\oplus}_{\sum W_i} \mathfrak{r} \hookrightarrow \mathfrak{s} \overrightarrow{\oplus}_R \mathfrak{r} \quad (3.3)$$

où $R = \sum W_i$ est la décomposition de R comme somme de représentations simples de la sous-algèbre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ de \mathfrak{s} . Il faut remarquer que des sous-algèbres isomorphes à $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ différentes ne donnent pas nécessairement la même décomposition de R . Néanmoins, ce fait est dépourvu d'intérêt pour notre analyse, en effet, nous nous intéressons seulement à la non trivialité des représentations W_i .

Proposition 11 *Pour $\dim \mathfrak{r} > 3$, il n'existe pas d'algèbre de Lie indécomposable $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \overrightarrow{\oplus}_R \mathfrak{r}$ dont le radical soit isomorphe à l'algèbre de Lie nilpotente L_n .*

Démonstration. Considérons les algèbres de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus_R L_n$, où R est une représentation réductible de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Soit $\{X_1, X_2, X_3, Y_1, \dots, Y_n\}$ une base de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus_R L_n$ telle que $\{X_1, X_2, X_3\}$ engendre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ (dont les crochets sont $[X_2, X_3] = X_1$, $[X_1, X_i] = 2(-1)^i X_i$, $i = 2, 3$) et $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ est une base de L_n . Si on considère les idéaux de la suite centrale descendante $C^i L_n$, on a $\dim C^i L_n = n - 1 - i$ ($1 \leq i \leq n - 2$), et il existe donc deux éléments $Y \in L_n - C^1 L_n$, $Z \in C^{n-3} L_n$ vérifiant

$$[Y, Z] = Z(L_n)$$

où $Z(L_n)$ est le centre de L_n . Le centre $Z(L_n)$ est engendré par un seul élément de L_n sur lequel $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ agit de façon triviale. Ceci montre que la représentation R contient des copies de la représentation triviale D_0 de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Si on applique l'identité de Jacobi au triplet $\{X_1, Y, Z\}$ on obtient

$$[Y, [X_1, Z]] = [Z, [X_1, Y]].$$

On peut supposer que X_1 agit comme une dérivation diagonalisable sur L_n , d'où $[X_1, Y_i] = \lambda_i Y_i$ pour tout i . De plus, on a en particulier

$$\lambda_Y + \lambda_Z = 0. \quad (3.4)$$

Sans perte de généralité, on suppose $Y = Y_1$ et $Y_{n-1} = Z$. Le fait fondamental est la nullité du poids associé au générateur du centre. Le système de poids de L_n est de la forme :

$$\Phi = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \dots, (n-2)\alpha_1 + \alpha_2\} \quad (3.5)$$

Par conséquent, toute dérivation diagonalisable de L_n est une combinaison linéaire des dérivations f_1, f_2 dont les valeurs propres sont respectivement :

$$\begin{aligned} f_1 &= (1, 0, 1, 2, \dots, n-2) \\ f_2 &= (0, 1, 1, 1, \dots, 1) \end{aligned}$$

On pose alors $[X_1, L_n] = (af_1 + bf_2)L_n$. L'équation 3.4 implique

$$a(n-2) + b = 0,$$

ainsi X_1 est associé aux valeurs propres

$$a(1, (2-n), \dots, k+2-n, \dots, -1, 0) \quad (3.6)$$

où $k \in \{0, \dots, n-3\}$. Pour $n > 3$, on a donc

$$k+2-n < 0, \quad 0 \leq k \leq n-3. \quad (3.7)$$

Pour toute représentation R de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, le nombre de représentations simples dans la décomposition R est donné par $\text{mult}_0(R) + \text{mult}_1(R)$, où $\text{mult}_i(R)$ est la multiplicité du poids i . Nous concluons de 3.7 que la seule représentation de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ayant le poids maximal λ est la représentation $V_1(\lambda = 1)$. Désormais les autres poids sont négatifs, ce qui est impossible en raison de la structure des représentations simples de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. On en conclut que $a = 0$ et donc $R = nD_0$. Ainsi, l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus_R L_n$ est une somme directe.

D'après la proposition 11, aucune algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \vec{\oplus}_R L_n$ indécomposable, ne peut être obtenue. Par 3.3, ce résultat se généralise à toute algèbre semi-simple. En effet, toute représentation non triviale R d'une algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{s} fournit une règle de ramification pour l'immersion de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. L'affirmation découle ainsi du lemme 1.

On obtient immédiatement une conséquence qui concerne les algèbres de Lie résolubles ayant un nilradical filiforme.

Corollaire 2 *Si l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \vec{\oplus}_R \mathfrak{r}$ est indécomposable, le nilradical de \mathfrak{r} n'est pas filiforme.*

Démonstration. Comme \mathfrak{r} est résoluble non nilpotente, alors la représentation R de \mathfrak{s} contient des copies de la représentation triviale D_0 . D'après le théorème de Goto [28], \mathfrak{r} est de la forme $\mathfrak{r} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{t}$ où \mathfrak{t} est un tore du nilradical \mathfrak{n} , \mathfrak{g} admet donc la sous-algèbre

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{s} \vec{\oplus}_{R'} \mathfrak{n} \quad (3.8)$$

où R' est la représentation induite. D'après le théorème 10, cette sous-algèbre est décomposable. Puisque $R|_{\mathfrak{t}} = (\dim \mathfrak{t}) D_0$, il en résulte que \mathfrak{g} est une somme directe.

Finalement, de la démonstration du théorème 11, on déduit le résultat suivant :

Corollaire 3 *Si l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \vec{\oplus}_R \mathfrak{r}$ avec $\mathfrak{s} \neq 0$, possède un radical \mathfrak{r} caractéristiquement nilpotent, alors elle est décomposable.*

Démonstration. Supposons que l'algèbre \mathfrak{r} est caractéristiquement nilpotente, c'est-à-dire que toute dérivation f de \mathfrak{r} est nilpotente. Ceci implique que la sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{s} vérifie

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{r}] = 0. \quad (3.9)$$

Comme pour tout $H_i \in \mathfrak{h}$, il existe des vecteurs non nuls $X_i, Y_i \in \mathfrak{s}$ tels que

$$[H_i, X_i] = 2X_i, [H_i, Y_i] = -2Y_i, [X_i, Y_i] = H_i. \quad (3.10)$$

Par ailleurs, pour tout $Z \in \mathfrak{r}$

$$[Z, [H_i, X_i]] + [X_i, [Z, H_i]] - [H_i, [X_i, Z]] = 0,$$

en tenant compte 3.9 et 3.10, on a

$$[X_i, Z] = 0.$$

On en conclut que $[\mathfrak{s}, \mathfrak{r}] = 0$.

Chapitre 4

Algèbres de Lie complexes ayant un nilradical quasi-filiforme

Dans ce chapitre nous présentons la liste des algèbres de Lie complexes dont le nilradical est quasi-filiforme naturellement gradué. Le calcul de toutes les extensions des algèbres de [27] a été long et conduit à de nombreuses possibilités.

Nous décrivons sommairement les algèbres obtenues en omettant les crochets du nilradical écrits dans la proposition 2.

4.1 Algèbres de Lie complexes ayant $\mathfrak{L}_{n-1} \oplus \mathbb{C}$ comme nilradical

L'ensemble des dérivations $\mathfrak{Der}(\mathfrak{L}_{n-1} \oplus \mathbb{C})$ pour $n \geq 4$ est un espace vectoriel de dimension $2n + 1$ engendré par les endomorphismes $ad(X_i), 0 \leq i \leq n - 3$ et par :

$$\begin{aligned} t_0(X_0) &= X_0, & t_0(X_i) &= (i - 1)X_i, \quad 2 \leq i \leq n - 2; \\ t_1(X_0) &= X_1; \\ t_2(X_i) &= X_i, & 1 \leq i \leq n - 2; \\ t_3(X_{n-1}) &= X_{n-1}; \\ h_k(X_i) &= X_{k+i}, & 1 \leq i \leq n - 2 - k, \quad 2 \leq k \leq n - 3; \\ g_0(X_0) &= X_{n-1}; \\ g_1(X_1) &= X_{n-1}; \\ g_2(X_{n-1}) &= X_{n-2}. \end{aligned}$$

Toute algèbre de Lie complexe ayant $\mathfrak{L}_{n-1} \oplus \mathbb{C}$ comme nilradical, est isomorphe à l'une des algèbres suivantes :

1. $\mathfrak{L}_{n-1}^{n+1,1}$:
 $[Y, X_0] = X_0, \quad [Y, X_i] = [(i - 1) + f_1^1]X_i, \quad 1 \leq i \leq n - 2, \quad [Y, X_{n-1}] = f_{n-1}^{n-1}X_{n-1}, \quad f_{n-1}^{n-1} \neq 0;$
2. $\mathfrak{L}_{n-1}^{n+1,2}$:
 $[Y, X_i] = X_i, \quad 1 \leq i \leq n - 2, \quad [Y, X_{n-1}] = f_{n-1}^{n-1}X_{n-1}, \quad f_{n-1}^{n-1} \neq 0;$
3. $\mathfrak{L}_{n-1}^{n+1,3}$:
 $[Y, X_0] = X_0 + X_1, \quad [Y, X_i] = iX_i, \quad 1 \leq i \leq n - 2, \quad [Y, X_{n-1}] = f_{n-1}^{n-1}X_{n-1}, \quad f_{n-1}^{n-1} \neq 0;$

4. $\mathfrak{L}_{n-1}^{n+1,4}$:
 $[Y, X_0] = X_0 + X_{n-1}, \quad [Y, X_i] = [(i-1) + f_1^1]X_i, \quad 1 \leq i \leq n-2, \quad [Y, X_{n-1}] = X_{n-1};$
5. $\mathfrak{L}_{n-1}^{n+1,5}$:
 $[Y, X_0] = X_0, \quad [Y, X_1] = f_1^1 X_1 + X_{n-1}, \quad [Y, X_i] = [(i-1) + f_1^1]X_i, \quad 2 \leq i \leq n-2,$
 $[Y, X_{n-1}] = f_1^1 X_{n-1};$
6. $\mathfrak{L}_{n-1}^{n+1,6}$:
 $[Y, X_0] = X_0 + X_1, \quad [Y, X_1] = X_1 + X_{n-1}, \quad [Y, X_i] = iX_i, \quad 2 \leq i \leq n-2, \quad [Y, X_{n-1}] = X_{n-1};$
7. $\mathfrak{L}_{n-1}^{n+1,7}$:
 $[Y, X_0] = X_0, \quad [Y, X_i] = [(i-1) + f_1^1]X_i, \quad 1 \leq i \leq n-2, \quad [Y, X_{n-1}] = X_{n-2} + (n-3 + f_1^1)X_{n-1};$
8. $\mathfrak{L}_{n-1}^{n+1,8}$:
 $[Y, X_0] = X_0 + X_1, \quad [Y, X_i] = iX_i, \quad 1 \leq i \leq n-2, \quad [Y, X_{n-1}] = X_{n-2} + (n-2)X_{n-1};$
9. $\mathfrak{L}_{n-1}^{n+1,9}$:
 $[Y, X_0] = X_0 + X_{n-1}, \quad [Y, X_i] = (i+3-n)X_i, \quad 1 \leq i \leq n-2, \quad [Y, X_{n-1}] = X_{n-2} + X_{n-1};$
10. $\mathfrak{L}_{n-1}^{n+1,10}$:
 $[Y, X_0] = X_1, \quad [Y, X_{n-1}] = X_{n-1};$
11. $\mathfrak{L}_{n-1}^{n+1,11}$:
 $[Y, X_i] = X_i, \quad 1 \leq i \leq n-2, \quad [Y, X_{n-1}] = X_{n-2} + X_{n-1};$
12. $\mathfrak{L}_{n-1}^{n+1,12}$:
 $[Y, X_1] = X_1 + X_{n-1}, \quad [Y, X_i] = X_i, \quad 2 \leq i \leq n-1, ;$
13. $\mathfrak{L}_{n-1}^{n+1,13}$:
 $[Y, X_1] = X_1 + X_{n-1}, \quad [Y, X_i] = X_i, \quad 2 \leq i \leq n-2, \quad [Y, X_{n-1}] = X_{n-2} + X_{n-1};$
 Pour les algèbres suivantes, au moins l'un des coefficients f_1^j est différent de zéro, on peut supposer que le premier f_1^j non nul est égal à 1.
14. $\mathfrak{L}_{n-1}^{n+1,14}$:
 $[Y, X_i] = X_i + \sum_{j=3}^{n-i-1} f_1^j X_{j+i-1}, \quad 1 \leq i \leq n-2, \quad [Y, X_{n-1}] = f_{n-1}^{n-1} X_{n-1} \quad f_{n-1}^{n-1} \neq 0;$
15. $\mathfrak{L}_{n-1}^{n+1,15}$:
 $[Y, X_i] = \sum_{j=3}^{n-i-1} f_1^j X_{j+i-1}, \quad 1 \leq i \leq n-2, \quad [Y, X_{n-1}] = X_{n-1};$
16. $\mathfrak{L}_{n-1}^{n+1,16}$:
 $[Y, X_0] = X_1, \quad [Y, X_i] = \sum_{j=3}^{n-i-1} f_1^j X_{j+i-1}, \quad 1 \leq i \leq n-2, \quad [Y, X_{n-1}] = X_{n-1};$
17. $\mathfrak{L}_{n-1}^{n+1,17}$:
 $[Y, X_i] = X_i + \sum_{j=3}^{n-i-1} f_1^j X_{j+i-1}, \quad 1 \leq i \leq n-2, \quad [Y, X_{n-1}] = X_{n-2} + X_{n-1};$
18. $\mathfrak{L}_{n-1}^{n+1,18}$:
 $[Y, X_1] = X_1 + \sum_{j=3}^{n-2} f_1^j X_j + X_{n-1}, \quad [Y, X_i] = X_i + \sum_{j=3}^{n-i-1} f_1^j X_{j+i-1}, \quad 2 \leq i \leq n-2,$
 $[Y, X_{n-1}] = f_{n-1}^{n-2} X_{n-2} + X_{n-1};$
19. $\mathfrak{L}_{n-1}^{n+1,19}$:
 $[Y, X_0] = X_{n-1}, \quad [Y, X_i] = X_i + \sum_{j=3}^{n-i-1} f_1^j X_{j+i-1}, \quad 1 \leq i \leq n-2;$
20. $\mathfrak{L}_{n-1}^{n+2,1}$:
 $[Y, X_0] = X_0, \quad [Y, X_i] = (i-1)X_i, \quad 1 \leq i \leq n-2, \quad [Y, X_{n-1}] = \lambda X_{n-1},$
 $[Z, X_i] = X_i, \quad 1 \leq i \leq n-2, \quad [Z, X_{n-1}] = \mu X_{n-1};$

21. $\mathfrak{L}_{n-1}^{n+2,2}$:
 $[Y, X_0] = X_0, \quad [Y, X_i] = (i-1)X_i, \quad 1 \leq i \leq n-2, \quad [Y, X_{n-1}] = X_{n-1}, \quad [Z, X_0] = X_{n-1},$
 $[Z, X_i] = X_i, \quad 1 \leq i \leq n-2;$
22. $\mathfrak{L}_{n-1}^{n+2,3}$:
 $[Y, X_0] = X_0 + X_{n-1}, \quad [Y, X_i] = (i-1)X_i, \quad 1 \leq i \leq n-2, \quad [Y, X_{n-1}] = X_{n-1}, \quad [Z, X_0] = \lambda X_{n-1},$
 $[Z, X_i] = X_i, \quad 1 \leq i \leq n-2;$
23. $\mathfrak{L}_{n-1}^{n+2,4}$:
 $[Y, X_0] = X_0, \quad [Y, X_i] = X_i, \quad 1 \leq i \leq n-2, \quad [Z, X_1] = X_1 + X_{n-1}, \quad [Z, X_i] = X_i, \quad 2 \leq i \leq n-1;$
24. $\mathfrak{L}_{n-1}^{n+2,5}$:
 $[Y, X_0] = X_0, \quad [Y, X_1] = X_{n-1}, \quad [Y, X_i] = (i-1)X_i, \quad 2 \leq i \leq n-2, \quad [Z, X_1] = X_1 + \lambda X_{n-1},$
 $[Z, X_i] = X_i, \quad 2 \leq i \leq n-1;$
25. $\mathfrak{L}_{n-1}^{n+2,6}$:
 $[Y, X_0] = X_0, \quad [Y, X_i] = (i-1)X_i, \quad 1 \leq i \leq n-2, \quad [Y, X_{n-1}] = (n-3)X_{n-1},$
 $[Z, X_i] = X_i, \quad 1 \leq i \leq n-2, \quad [Z, X_{n-1}] = X_{n-2} + X_{n-1};$
26. $\mathfrak{L}_{n-1}^{n+2,7}$:
 $[Y, X_0] = X_0, \quad [Y, X_i] = (i-1)X_i, \quad 1 \leq i \leq n-2, \quad [Y, X_{n-1}] = X_{n-2} + (n-3)X_{n-1},$
 $[Z, X_i] = X_i, \quad 1 \leq i \leq n-2, \quad [Z, X_{n-1}] = \lambda X_{n-2} + X_{n-1};$
27. $\mathfrak{L}_{n-1}^{n+3,1}$:
 $[Y, X_0] = X_0, \quad [Y, X_i] = (i-1)X_i, \quad 2 \leq i \leq n-2, \quad [Z, X_i] = X_i, \quad 1 \leq i \leq n-2,$
 $[U, X_{n-1}] = X_{n-1}.$

4.2 Algèbres de Lie complexes ayant $\mathfrak{Q}_{2n} \oplus \mathbb{C}$ comme nilradical

L'ensemble des dérivations $\mathfrak{Der}(\mathfrak{Q}_{2n} \oplus \mathbb{C})$ pour $n \geq 3$ est un espace vectoriel de dimension $3n+4$ engendré par les endomorphismes $ad(X_i)$, $1 \leq i \leq 2n-1$ et par :

$$\begin{aligned}
t_1(X_1) &= X_1, & t_1(X_i) &= (i-2)X_i, \quad 2 \leq i \leq 2n-1, & t_1(X_{2n}) &= (2n-3)X_{2n}; \\
t_2(X_i) &= X_i, & & 1 \leq i \leq 2n-1, & t_2(X_{2n}) &= 2X_{2n}; \\
t_3(X_{2n+1}) &= X_{2n+1}; \\
h_k(X_i) &= X_{k+i}, & & 2 \leq i \leq 2n-1-k, \quad 3 \leq k \leq 2n-3, \quad k \text{ impair}; \\
g_1(X_1) &= X_{2n}; \\
g_2(X_1) &= X_{2n+1}; \\
g_3(X_2) &= X_{2n+1}; \\
g_4(X_{2n+1}) &= X_{2n}.
\end{aligned}$$

Toute algèbre de Lie complexe ayant $\mathfrak{Q}_{2n} \oplus \mathbb{C}$ comme nilradical, est isomorphe à l'une des algèbres suivantes :

1. $\mathfrak{Q}_{2n}^{2n+2,1}$:
 $[Y, X_1] = X_1, \quad [Y, X_i] = [(i-2) + f_2^2]X_i, \quad 2 \leq i \leq 2n-1, \quad [Y, X_{2n}] = (2n-3 + 2f_2^2)X_{2n},$
 $[Y, X_{2n+1}] = f_{2n+1}^{2n+1}X_{2n+1}, \quad f_{2n+1}^{2n+1} \neq 0;$
2. $\mathfrak{Q}_{2n}^{2n+2,2}$:
 $[Y, X_i] = f_2^2 X_i, \quad 2 \leq i \leq 2n-1, \quad [Y, X_{2n}] = 2f_2^2 X_{2n}, \quad [Y, X_{2n+1}] = X_{2n+1};$

3. $\Omega_{2n}^{2n+2,3}$:
 $[Y, X_1] = X_1, \quad [Y, X_2] = f_2^2 X_2 + X_{2n+1}, \quad [Y, X_i] = [(i-2) + f_2^2] X_i, \quad 3 \leq i \leq 2n-1,$
 $[Y, X_{2n}] = (2n-3 + 2f_2^2) X_{2n}, \quad [Y, X_{2n+1}] = f_2^2 X_{2n+1};$
4. $\Omega_{2n}^{2n+2,4}$:
 $[Y, X_1] = X_1 + X_{2n+1}, \quad [Y, X_i] = [(i-2) + f_2^2] X_i, \quad 2 \leq i \leq 2n-1, \quad [Y, X_{2n}] = (2n-3 + 2f_2^2) X_{2n},$
 $[Y, X_{2n+1}] = X_{2n+1};$
5. $\Omega_{2n}^{2n+2,5}$:
 $[Y, X_1] = X_1, \quad [Y, X_i] = [(i-2) + f_2^2] X_i, \quad 2 \leq i \leq 2n-1, \quad [Y, X_{2n}] = (2n-3 + 2f_2^2) X_{2n},$
 $[Y, X_{2n+1}] = X_{2n} + (2n-3 + 2f_2^2) X_{2n+1};$
6. $\Omega_{2n}^{2n+2,6}$:
 $[Y, X_1] = X_1, \quad [Y, X_2] = (3-2n) X_2 + X_{2n+1}, \quad [Y, X_i] = (i+1-2n) X_i, \quad 3 \leq i \leq 2n-1,$
 $[Y, X_{2n}] = (3-2n) X_{2n}, \quad [Y, X_{2n+1}] = X_{2n} + (3-2n) X_{2n+1};$
7. $\Omega_{2n}^{2n+2,7}$:
 $[Y, X_1] = X_1 + X_{2n+1}, \quad [Y, X_i] = (i-n) X_i, \quad 2 \leq i \leq 2n-1, \quad [Y, X_{2n}] = X_{2n},$
 $[Y, X_{2n+1}] = X_{2n} + X_{2n+1};$
8. $\Omega_{2n}^{2n+2,8}$:
 $[Y, X_1] = X_1 + X_{2n}, \quad [Y, X_i] = (i-n) X_i, \quad 2 \leq i \leq 2n-1, \quad [Y, X_{2n}] = X_{2n};$
 $[Y, X_{2n+1}] = f_{2n+1}^{2n+1} X_{2n+1}, \quad f_{2n+1}^{2n+1} \neq 0;$
9. $\Omega_{2n}^{2n+2,9}$:
 $[Y, X_1] = X_1 + X_{2n}, \quad [Y, X_2] = (2-n) X_2 + X_{2n+1}, \quad [Y, X_i] = (i-n) X_i, \quad 3 \leq i \leq 2n-1,$
 $[Y, X_{2n}] = X_{2n}, \quad [Y, X_{2n+1}] = (2-n) X_{2n+1};$
10. $\Omega_{2n}^{2n+2,10}$:
 $[Y, X_2] = X_2 + X_{2n+1}, \quad [Y, X_i] = X_i, \quad 3 \leq i \leq 2n-1, \quad [Y, X_{2n}] = 2X_{2n}, \quad [Y, X_{2n+1}] = X_{2n+1};$
11. $\Omega_{2n}^{2n+2,11}$:
 $[Y, X_1] = X_{2n+1}, \quad [Y, X_i] = X_i, \quad 2 \leq i \leq 2n-1, \quad [Y, X_{2n}] = 2X_{2n};$
12. $\Omega_{2n}^{2n+2,12}$:
 $[Y, X_i] = X_i, \quad 2 \leq i \leq 2n-1, \quad [Y, X_{2n}] = 2X_{2n}, \quad [Y, X_{2n+1}] = X_{2n} + 2X_{2n+1};$
13. $\Omega_{2n}^{2n+2,13}$:
 $[Y, X_1] = X_{2n}, \quad [Y, X_{2n+1}] = X_{2n+1};$
 Pour les algèbres suivantes, au moins l'un des coefficients f_1^j est différent de zéro, on peut supposer que le premier f_1^j non nul est égal à 1.

14. $\Omega_{2n}^{2n+2,14}$:
 $[Y, X_i] = f_2^2 X_i + \sum_{\substack{j=i+3 \\ j+i \text{ impair}}}^{2n-1} f_2^{j+i-2} X_j, \quad 2 \leq i \leq 2n-1, \quad [Y, X_{2n}] = 2f_2^2 X_{2n}, \quad [Y, X_{2n+1}] = X_{2n+1};$
15. $\Omega_{2n}^{2n+2,15}$:
 $[Y, X_2] = \sum_{\substack{k=5 \\ k \text{ impair}}}^{2n-1} f_2^k X_k + X_{2n+1}, \quad [Y, X_i] = X_i + \sum_{\substack{j=i+3 \\ j+i \text{ impair}}}^{2n-1} f_2^{j+i-2} X_j, \quad 3 \leq i \leq 2n-1,$
 $[Y, X_{2n}] = 2X_{2n}, \quad [Y, X_{2n+1}] = X_{2n+1};$
16. $\Omega_{2n}^{2n+2,16}$:
 $[Y, X_1] = X_{2n+1}, \quad [Y, X_i] = X_i + \sum_{\substack{j=i+3 \\ j+i \text{ impair}}}^{2n-1} f_2^{j+i-2} X_j, \quad 2 \leq i \leq 2n-1, \quad [Y, X_{2n}] = 2X_{2n};$

17. $\mathfrak{Q}_{2n}^{2n+2,17}$:
- $$[Y, X_i] = X_i + \sum_{\substack{j=i+3 \\ j+i \text{ impair}}}^{2n-1} f_2^{j+i-2} X_j, \quad 2 \leq i \leq 2n-1,$$
- $$[Y, X_{2n}] = 2X_{2n}, \quad [Y, X_{2n+1}] = X_{2n} + 2X_{2n+1};$$
18. $\mathfrak{Q}_{2n}^{2n+2,18}$:
- $$[Y, X_i] = X_i + \sum_{\substack{j=i+3 \\ j+i \text{ impair}}}^{2n-1} f_2^{j+i-2} X_j, \quad 2 \leq i \leq 2n-1, \quad [Y, X_{2n+1}] = X_{2n+1};$$
19. $\mathfrak{Q}_{2n}^{2n+2,19}$:
- $$[Y, X_1] = X_{2n}, \quad [Y, X_i] = \sum_{\substack{j=i+3 \\ j+i \text{ impair}}}^{2n-1} f_2^{j+i-2} X_j, \quad 2 \leq i \leq 2n-1, \quad [Y, X_{2n+1}] = X_{2n+1};$$
20. $\mathfrak{Q}_{2n}^{2n+3,1}$:
- $$[Y, X_1] = X_1, \quad [Y, X_i] = (i-2)X_i, \quad 2 \leq i \leq 2n-1, \quad [Y, X_{2n}] = (2n-3)X_{2n},$$
- $$[Y, X_{2n+1}] = \lambda X_{2n+1}, \quad [Z, X_i] = X_i, \quad 2 \leq i \leq 2n-1, \quad [Z, X_{2n}] = 2X_{2n},$$
- $$[Z, X_{2n+1}] = \mu X_{2n+1};$$
21. $\mathfrak{Q}_{2n}^{2n+3,2}$:
- $$[Y, X_1] = X_1 + X_{2n+1}, \quad [Y, X_i] = (i-2)X_i, \quad 2 \leq i \leq 2n-1, \quad [Y, X_{2n}] = (2n-3)X_{2n},$$
- $$[Y, X_{2n+1}] = X_{2n+1}, \quad [Z, X_1] = \lambda X_{2n+1}, \quad [Z, X_i] = X_i, \quad 2 \leq i \leq 2n-1, \quad [Z, X_{2n}] = 2X_{2n};$$
22. $\mathfrak{Q}_{2n}^{2n+3,3}$:
- $$[Y, X_1] = X_1, \quad [Y, X_i] = (i-2)X_i, \quad 2 \leq i \leq 2n-1, \quad [Y, X_{2n}] = (2n-3)X_{2n};$$
- $$[Y, X_{2n+1}] = X_{2n+1}, \quad [Z, X_1] = X_{2n+1}, \quad [Z, X_i] = X_i, \quad 2 \leq i \leq 2n-1, \quad [Z, X_{2n}] = 2X_{2n};$$
23. $\mathfrak{Q}_{2n}^{2n+3,4}$:
- $$[Y, X_1] = X_1, \quad [Y, X_i] = (i-2)X_i, \quad 2 \leq i \leq 2n-1, \quad [Y, X_{2n}] = (2n-3)X_{2n},$$
- $$[Z, X_2] = X_2 + X_{2n+1}, \quad [Z, X_i] = X_i, \quad 3 \leq i \leq 2n-1, \quad [Z, X_{2n}] = 2X_{2n},$$
- $$[Z, X_{2n+1}] = X_{2n+1};$$
24. $\mathfrak{Q}_{2n}^{2n+3,5}$:
- $$[Y, X_1] = X_1, \quad [Y, X_2] = X_{2n+1}, \quad [Y, X_i] = (i-2)X_i, \quad 3 \leq i \leq 2n-1, \quad [Y, X_{2n}] = (2n-3)X_{2n},$$
- $$[Z, X_2] = X_2 + \lambda X_{2n+1}, \quad [Z, X_i] = X_i, \quad 3 \leq i \leq 2n-1, \quad [Z, X_{2n}] = 2X_{2n}, \quad [Z, X_{2n+1}] = X_{2n+1};$$
25. $\mathfrak{Q}_{2n}^{2n+3,6}$:
- $$[Y, X_1] = X_1, \quad [Y, X_i] = (i-2)X_i, \quad 2 \leq i \leq 2n-1, \quad [Y, X_{2n}] = (2n-3)X_{2n},$$
- $$[Y, X_{2n+1}] = (2n-3)X_{2n+1}, \quad [Z, X_i] = X_i, \quad 2 \leq i \leq 2n-1, \quad [Z, X_{2n}] = 2X_{2n},$$
- $$[Z, X_{2n+1}] = X_{2n} + 2X_{2n+1};$$
26. $\mathfrak{Q}_{2n}^{2n+3,7}$:
- $$[Y, X_1] = X_1, \quad [Y, X_i] = (i-2)X_i, \quad 2 \leq i \leq 2n-1, \quad [Y, X_{2n}] = (2n-3)X_{2n},$$
- $$[Y, X_{2n+1}] = X_{2n} + (2n-3)X_{2n+1}, \quad [Z, X_i] = X_i, \quad 2 \leq i \leq 2n-1, \quad [Z, X_{2n}] = 2X_{2n},$$
- $$[Z, X_{2n+1}] = \lambda X_{2n} + 2X_{2n+1};$$
27. $\mathfrak{Q}_{2n}^{2n+4,1}$:
- $$[Y, X_1] = X_1, \quad [Y, X_i] = (i-2)X_i, \quad 3 \leq i \leq 2n-1, \quad [Y, X_{2n}] = (2n-3)X_{2n},$$
- $$[Z, X_i] = X_i, \quad 2 \leq i \leq 2n-1, \quad [Z, X_{2n}] = 2X_{2n}, \quad [U, X_{2n+1}] = X_{2n+1}.$$

4.3 Algèbres de Lie complexes ayant $\mathfrak{L}_{n,r}$ comme nilradical

L'ensemble des dérivations $\mathfrak{Der}(\mathfrak{L}_{n,r})$ ($n > 5$, r impair, $3 \leq r \leq 2[\frac{n-1}{2}] - 1$) est un espace vectoriel de dimension $\frac{4n+1-r}{2}$ engendré par les endomorphismes $ad(X_i)$, $0 \leq i \leq n-3$ et par :

$$\begin{aligned}
t_0(X_0) &= X_0, & t_0(X_i) &= (i-1)X_i \quad 2 \leq i \leq n-2, & t_0(X_{n-1}) &= (r-2)X_{n-1}; \\
t_1(X_0) &= X_1, & t_1(X_r) &= X_{n-1}; \\
t_2(X_i) &= X_i, & 2 \leq i \leq n-2, & & t_2(X_{n-1}) &= 2X_{n-1}; \\
h_k(X_i) &= X_{k+i}, & 1 \leq i \leq n-2-k, \quad 2 \leq k \leq n-2 & \text{ et } k \text{ impair si } k \leq r-3; \\
g_1(X_0) &= X_r; \\
g_2(X_0) &= X_{n-1}.
\end{aligned}$$

Toute algèbre de Lie complexe ayant $\mathfrak{L}_{n,r}$ comme nilradical, est isomorphe à l'une des algèbres suivantes :

1. $\mathfrak{L}_{n,r}^{n+1,1}$:
 $[Y, X_0] = X_0, \quad [Y, X_i] = [(i-1) + f_1^1]X_i, \quad 1 \leq i \leq n-2, \quad [Y, X_{n-1}] = (r-2 + 2f_1^1)X_{n-1};$
2. $\mathfrak{L}_{n,r}^{n+1,2}$:
 $[Y, X_i] = X_i, \quad 1 \leq i \leq n-2, \quad [Y, X_{n-1}] = 2X_{n-1};$
3. $\mathfrak{L}_{n,r}^{n+1,3}$:
 $[Y, X_0] = X_0, \quad [Y, X_1] = (2-r)X_1 + X_{n-1}, \quad [Y, X_i] = (i+1-r)X_i, \quad 2 \leq i \leq n-2,$
 $[Y, X_{n-1}] = (2-r)X_{n-1};$
4. $\mathfrak{L}_{n,r}^{n+1,4}$:
 $[Y, X_0] = X_0 + X_1, \quad [Y, X_i] = iX_i, \quad i \in \{1, \dots, n-2\} \setminus \{r\}, \quad [Y, X_r] = rX_r + X_{n-1},$
 $[Y, X_{n-1}] = rX_{n-1};$
5. $\mathfrak{L}_{n,r}^{n+1,5}$:
 $[Y, X_0] = X_0 + X_{n-1}, \quad [Y, X_i] = \frac{2l+1-r}{2}X_i, \quad 1 \leq i \leq n-2, \quad [Y, X_{n-1}] = X_{n-1};$ Pour les algèbres suivantes, au moins l'un des coefficients f_1^j est différent de zéro, on peut supposer que le premier f_1^j non nul est égal à 1.
6. $\mathfrak{L}_{n,r}^{n+1,6}$:
 $[Y, X_i] = X_i + \sum_{k=i+3}^{n-2} f_1^{k+i-1}X_k, \quad 1 \leq i \leq n-2, \quad \text{où } f_1^{k+i-1} = 0 \text{ si } k+i \text{ est pair et } k+i \leq r,$
 $[Y, X_{n-1}] = 2X_{n-1};$
7. $\mathfrak{L}_{n,r}^{n+2,1}$:
 $[Y, X_0] = X_0, \quad [Y, X_i] = (i-1)X_i, \quad 2 \leq i \leq n-2, \quad [Y, X_{n-1}] = (r-2)X_{n-1},$
 $[Z, X_i] = X_i, \quad 1 \leq i \leq n-2, \quad [Z, X_{n-1}] = 2X_{n-1}.$

4.4 Algèbres de Lie complexes ayant $\mathfrak{Q}_{n,r}$ comme nilradical

L'ensemble des dérivations $\mathfrak{Der}(\mathfrak{Q}_{n,r})$ ($n \geq 7$, n impair, r impair, $3 \leq r \leq n-4$) est un espace vectoriel de dimension $\frac{3n+3}{2}$ si $r \leq \frac{n-1}{2}$ et $\frac{3n+1}{2}$ si $r > \frac{n-1}{2}$, engendré par les endomorphismes $ad(X_i), 0 \leq i \leq n-3$ et par :

$$\begin{aligned}
t_0(X_0) &= X_0, & t_0(X_i) &= (i-1)X_i, \quad 2 \leq i \leq n-3, & t_0(X_{n-2}) &= (n-4)X_{n-2}, \\
t_0(X_{n-1}) &= (r-2)X_{n-1}; \\
t_1(X_i) &= X_i, & 1 \leq i \leq n-3, & & t_1(X_i) &= 2X_i, \quad i = n-2, n-1; \\
h_k(X_i) &= X_{k+i}, & 1 \leq i \leq n-2-k, \quad 3 \leq k \leq n-2 & \text{ et } k \text{ impair}; \\
h_{n-2-r}(X_i) &= X_{i+n-2-r}, & 1 \leq i \leq r \text{ si } r \leq \frac{n-1}{2}; \\
g_1(X_0) &= X_{n-2}; \\
g_2(X_0) &= X_{n-1}.
\end{aligned}$$

Toute algèbre de Lie complexe ayant $\mathfrak{Q}_{n,r}$ comme nilradical, est isomorphe à l'une des algèbres suivantes :

1. $\mathfrak{Q}_{n,r}^{n+1,1}$:
 $[Y, X_0] = X_0$, $[Y, X_i] = [(i-1) + f_1^1]X_i$, $1 \leq i \leq n-3$, $[Y, X_{n-2}] = (n-4 + 2f_1^1)X_{n-2}$,
 $[Y, X_{n-1}] = (r-2 + 2f_1^1)X_{n-1}$;
2. $\mathfrak{Q}_{n,r}^{n+1,2}$:
 $[Y, X_i] = X_i$, $1 \leq i \leq n-3$, $[Y, X_{n-2}] = 2X_{n-2}$, $[Y, X_{n-1}] = 2X_{n-1}$;
3. $\mathfrak{Q}_{n,r}^{n+1,3}$:
 $[Y, X_0] = X_0 + X_{n-1}$, $[Y, X_i] = \frac{2i+1-r}{2}X_i$, $1 \leq i \leq n-3$, $[Y, X_{n-2}] = (n-r-1)X_{n-2}$,
 $[Y, X_{n-1}] = X_{n-1}$;
4. $\mathfrak{Q}_{n,r}^{n+1,4}$:
 $[Y, X_0] = X_0$, $[Y, X_1] = (2-r)X_1 + X_{n-1}$, $[Y, X_i] = (i+1-r)X_i$, $2 \leq i \leq n-3$,
 $[Y, X_{n-2}] = (n-r)X_{n-2}$, $[Y, X_{n-1}] = (2-r)X_{n-1}$;
5. $\mathfrak{Q}_{n,r}^{n+1,5}$:
 $[Y, X_0] = X_0 + X_{n-2}$, $[Y, X_i] = \frac{2i+3-n}{2}X_i$, $1 \leq i \leq n-3$, $[Y, X_{n-2}] = X_{n-2}$,
 $[Y, X_{n-1}] = (r-n+3)X_{n-1}$;
6. $\mathfrak{Q}_{n,r}^{n+1,6}$:
On peut supposer que le premier coefficient f_1^j non nul est égal à 1 et $f_1^{n-r-1} = 0$ si $r > \frac{n-1}{2}$.
 $[Y, X_i] = X_i + \sum_{\substack{k=i+3 \\ k-i \neq n-r-2, \text{ impair}}}^{n-3} f_1^{k-i+1}X_k + f_1^{n-r-1}X_{n+i-r-2}$, $1 \leq i \leq n-3$
 $[Y, X_{n-2}] = 2X_{n-2}$, $[Y, X_{n-1}] = 2f_1^{n-r-1}X_{n-2} + 2X_{n-1}$;
7. $\mathfrak{Q}_{n,r}^{n+2,1}$:
 $[Y, X_0] = X_0$, $[Y, X_i] = (i-1)X_i$, $2 \leq i \leq n-3$, $[Y, X_{n-2}] = (n-4)X_{n-2}$,
 $[Y, X_{n-1}] = (r-2)X_{n-1}$, $[Z, X_i] = X_i$, $1 \leq i \leq n-3$, $[Z, X_{n-2}] = 2X_{n-2}$,
 $[Z, X_{n-1}] = 2X_{n-1}$.

4.5 Algèbres de Lie complexes ayant $\mathfrak{T}_{n,n-3}$ comme nilradical

L'ensemble des dérivations $\mathfrak{Der}(\mathfrak{T}_{n,n-3})$ (n pair, $n \geq 6$) est un espace vectoriel de dimension $n+4$ engendré par les endomorphismes $ad(X_i)$, $0 \leq i \leq n-3$, $n-1$ et par :

$$\begin{aligned} t_0(X_0) &= X_0, \quad t_0(X_i) = (i-1)X_i, \quad 2 \leq i \leq n-3, \quad t_0(X_{n-2}) = (n-4)X_{n-2}, \quad t_0(X_{n-1}) = (n-5)X_{n-1}; \\ t_1(X_i) &= X_i, \quad 1 \leq i \leq n-3, \quad t_1(X_i) = 2X_i, \quad i = n-2, n-1; \\ h_{n-4}(X_1) &= X_{n-3}; \\ g_1(X_0) &= X_{n-1}; \\ g_2(X_1) &= X_{n-1}, \quad g_2(X_2) = X_{n-2}. \end{aligned}$$

Toute algèbre de Lie complexe ayant $\mathfrak{T}_{n,n-3}$ comme nilradical, est isomorphe à l'une des algèbres suivantes :

1. $\mathfrak{T}_{n,n-3}^{n+1,1}$:
 $[Y, X_0] = X_0$, $[Y, X_i] = (i-1 + f_1^1)X_i$, $1 \leq i \leq n-3$, $[Y, X_{n-2}] = (n-4 + 2f_1^1)X_{n-2}$,
 $[Y, X_{n-1}] = (n-5 + 2f_1^1)X_{n-1}$;
2. $\mathfrak{T}_{n,n-3}^{n+1,2}$:
 $[Y, X_i] = X_i$, $1 \leq i \leq n-3$, $[Y, X_{n-2}] = 2X_{n-2}$, $[Y, X_{n-1}] = 2X_{n-1}$;

3. $\mathfrak{T}_{n,n-3}^{n+1,3}$:
 $[Y, X_0] = X_0 + X_{n-1}, \quad [Y, X_i] = \frac{2i-n+4}{2}X_i, \quad 1 \leq i \leq n-3, \quad [Y, X_{n-2}] = 2X_{n-2},$
 $[Y, X_{n-1}] = X_{n-1};$
4. $\mathfrak{T}_{n,n-3}^{n+1,4}$:
 $[Y, X_0] = X_0, \quad [Y, X_1] = (5-n)X_1 + X_{n-1}, \quad [Y, X_2] = (6-n)X_2 + X_{n-2},$
 $[Y, X_i] = (i-n+4)X_i, \quad 3 \leq i \leq n-4, \quad [Y, X_{n-2}] = (6-n)X_{n-2}, \quad [Y, X_{n-1}] = (5-n)X_{n-1};$
5. $\mathfrak{T}_{n,n-3}^{n+1,5}$:
 $[Y, X_1] = X_1 + X_{n-3}, \quad [Y, X_i] = X_i, \quad 2 \leq i \leq n-3, \quad [Y, X_{n-2}] = 2X_{n-2}, \quad [Y, X_{n-1}] = 2X_{n-1};$
6. $\mathfrak{T}_{n,n-3}^{n+2,1}$:
 $[Y, X_0] = X_0, \quad [Y, X_i] = (i-1)X_i, \quad 1 \leq i \leq n-3, \quad [Y, X_{n-2}] = (n-4)X_{n-2},$
 $[Y, X_{n-1}] = (n-5)X_{n-1}, \quad [Z, X_i] = X_i, \quad 1 \leq i \leq n-3, \quad [Z, X_{n-2}] = 2X_{n-2},$
 $[Z, X_{n-1}] = 2X_{n-1}.$

4.6 Algèbres de Lie complexes ayant $\mathfrak{T}_{n,n-4}$ comme nilradical

L'ensemble des dérivations $\mathfrak{Der}(\mathfrak{T}_{n,n-4})$ (n impair, $n \geq 7$) un espace vectoriel de dimension $n+4$ engendré par les endomorphismes $ad(X_i)$, $i = 0, \dots, n-3, n-1$ et par :

$$\begin{aligned} t_0(X_0) &= X_0, & t_0(X_i) &= (i-1)X_i, & 2 \leq i \leq n-4, \\ t_0(X_i) &= (i-2)X_i, & i &= n-3, n-2, & t_0(X_{n-1}) &= (n-6)X_{n-1}; \\ t_1(X_i) &= X_i, & 1 \leq i \leq n-4, & & t_1(X_i) &= 2X_i, \quad i = n-3, n-2, n-1; \\ h_{n-3}(X_1) &= X_{n-2}; \\ g_1(X_0) &= X_{n-1}; \\ g_2(X_1) &= X_{n-1}, & g_2(X_2) &= X_{n-3}, & g_2(X_3) &= X_{n-2}. \end{aligned}$$

Toute algèbre de Lie complexe ayant $\mathfrak{T}_{n,n-4}$ comme nilradical, est isomorphe à l'une des algèbres suivantes :

1. $\mathfrak{T}_{n,n-4}^{n+1,1}$:
 $[Y, X_0] = X_0, \quad [Y, X_i] = (i-1+f_1^1)X_i, \quad 1 \leq i \leq n-4, \quad [Y, X_{n-3}] = (n-5+2f_1^1)X_{n-3},$
 $[Y, X_{n-2}] = (n-4+2f_1^1)X_{n-2}, \quad [Y, X_{n-1}] = (n-6+2f_1^1)X_{n-1};$
2. $\mathfrak{T}_{n,n-4}^{n+1,2}$:
 $[Y, X_i] = (i-1)X_i, \quad 1 \leq i \leq n-4, \quad [Y, X_i] = 2X_i, \quad i = n-3, n-2, n-1;$
3. $\mathfrak{T}_{n,n-4}^{n+1,3}$:
 $[Y, X_0] = X_0 + X_{n-1}, \quad [Y, X_i] = \frac{2i-n+5}{2}X_i, \quad 1 \leq i \leq n-4, \quad [Y, X_{n-3}] = 2X_{n-3},$
 $[Y, X_{n-2}] = 3X_{n-2}, \quad [Y, X_{n-1}] = X_{n-1};$
4. $\mathfrak{T}_{n,n-4}^{n+1,4}$:
 $[Y, X_0] = X_0, \quad [Y, X_1] = (4-n)X_1 + X_{n-2}, \quad [Y, X_i] = (i-n+3)X_i, \quad 2 \leq i \leq n-4,$
 $[Y, X_{n-3}] = (3-n)X_{n-3}, \quad [Y, X_{n-2}] = (4-n)X_{n-2}, \quad [Y, X_{n-1}] = (2-n)X_{n-1};$
5. $\mathfrak{T}_{n,n-4}^{n+1,5}$:
 $[Y, X_0] = X_0, \quad [Y, X_1] = (6-n)X_1 + X_{n-1}, \quad [Y, X_2] = (7-n)X_2 + X_{n-3},$
 $[Y, X_3] = (8-n)X_3 + X_{n-2}, \quad [Y, X_i] = (i+5-n)X_i, \quad 4 \leq i \leq n-4,$
 $[Y, X_{n-3}] = (7-n)X_{n-3}, \quad [Y, X_{n-2}] = (8-n)X_{n-2}, \quad [Y, X_{n-1}] = (6-n)X_{n-1};$

6. $\mathfrak{T}_{n,n-4}^{n+2,1}$:

$$\begin{aligned} [Y, X_0] &= X_0, & [Y, X_i] &= (i-1)X_i, \quad 1 \leq i \leq n-4, & [Y, X_{n-3}] &= (n-5)X_{n-3}, \\ [Y, X_{n-2}] &= (n-4)X_{n-2}, & [Y, X_{n-1}] &= (n-6)X_{n-1}, & [Z, X_i] &= X_i, \quad 1 \leq i \leq n-4, \\ [Z, X_i] &= 2X_i, \quad i = n-3, n-2, n-1. \end{aligned}$$

4.7 Algèbres de Lie complexes ayant $\mathfrak{E}_{7,3}$ comme nilradical

L'ensemble des dérivations $\mathfrak{Der}(\mathfrak{E}_{7,3})$ un espace vectoriel de dimension 11 engendré par les endomorphismes $ad(X_i)$ pour $0 \leq i \leq 4$, $ad(Y)$ et par :

$$\begin{aligned} t_0(X_0) &= X_0, & t_0(X_i) &= iX_i, \quad 1 \leq i \leq 5, & t_0(Y) &= 3Y; \\ h_2(X_i) &= X_{i+2}, \quad 1 \leq i \leq 3; \\ h_4(X_1) &= X_5; \\ g_1(X_0) &= X_3, & g_1(X_2) &= -X_4, & g_1(X_3) &= -X_5; \\ g_2(X_0) &= Y, & g_2(X_2) &= X_4, & g_2(X_3) &= 2X_5, \\ g_2(Y) &= -X_5. \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathfrak{E}_{7,3} \oplus \langle t_0 \rangle$ est la seule algèbre de Lie complexe ayant $\mathfrak{E}_{7,3}$ comme nilradical.

4.8 Algèbres de Lie complexes ayant $\mathfrak{E}_{9,5}^1$ comme nilradical

L'ensemble des dérivations $\mathfrak{Der}(\mathfrak{E}_{9,5}^1)$ un espace vectoriel de dimension 13 engendré par les endomorphismes $ad(X_i)$ pour $0 \leq i \leq 6$, $ad(X_8)$ et par :

$$\begin{aligned} t_0(X_0) &= X_0, & t_0(X_i) &= (i-1)X_i, \quad 1 \leq i \leq 5, & t_0(X_i) &= 4X_i \quad i = 6, 7, \\ t_0(X_8) &= 3X_8, & t_1(X_i) &= X_i, \quad 1 \leq i \leq 5, & t_1(X_i) &= 2X_i \quad i = 6, 8, \\ t_1(X_7) &= 3X_7, \\ h_1(X_1) &= X_5, & h_2(X_0) &= X_7, \\ h_3(X_0) &= X_8, & h_3(X_3) &= 3X_7. \end{aligned}$$

Toute algèbre de Lie complexe ayant $\mathfrak{E}_{9,5}^1$ comme nilradical, est isomorphe à l'une des algèbres suivantes :

1. $\mathfrak{E}_{9,5}^{1,1}$:

$$\begin{aligned} [Y, X_0] &= X_0, & [Y, X_i] &= (i-1+f_1^1)X_i, \quad 1 \leq i \leq 5, & [Y, X_6] &= (4+2f_1^1)X_6, \\ [Y, X_7] &= (4+3f_1^1)X_7, & [Y, X_8] &= (3+2f_1^1)X_8; \end{aligned}$$

2. $\mathfrak{E}_{9,5}^{1,2}$:

$$[Y, X_i] = X_i, \quad 1 \leq i \leq 5, \quad [Y, X_i] = 2X_i, \quad i = 6, 8, \quad [Y, X_7] = 3X_7;$$

3. $\mathfrak{E}_{9,5}^{1,3}$:

$$\begin{aligned} [Y, X_0] &= X_0 + X_7 + f_0^8 X_8, & [Y, X_i] &= (i-2)X_i, \quad i = 1, 4, 5, & [Y, X_3] &= X_3 + 3f_0^8 X_7, \\ [Y, X_6] &= 2X_6, & [Y, X_i] &= X_i, \quad i = 7, 8; \end{aligned}$$

4. $\mathfrak{E}_{9,5}^{1,4}$:

$$\begin{aligned} [Y, X_1] &= X_1 + X_5, & [Y, X_i] &= X_i, \quad i = 2, 3, 4, 5, & [Y, X_i] &= 2X_i, \quad i = 6, 8, \\ [Y, X_7] &= 3X_7; \end{aligned}$$

5. $\mathfrak{E}_{9,5}^{1,5}$:

$$\begin{aligned} [Y, X_0] &= X_0, & [Y, X_i] &= (i-1)X_i, \quad 2 \leq i \leq 5, & [Y, X_i] &= 4X_i, \quad i = 6, 7, \\ [Y, X_8] &= 3X_8, & [Z, X_i] &= X_i, \quad 1 \leq i \leq 5, & [Z, X_i] &= 2X_i, \quad i = 6, 8, \\ [Z, X_7] &= 3X_7. \end{aligned}$$

4.9 Algèbres de Lie complexes ayant $\mathfrak{E}_{9,5}^2$ comme nilradical

L'ensemble des dérivations $\mathfrak{Der}(\mathfrak{E}_{9,5}^2)$ un espace vectoriel de dimension 12 engendré par les endomorphismes $ad(X_i)$ pour $0 \leq i \leq 6$, $ad(Y)$ et par :

$$t_0(X_0) = X_0, \quad t_0(X_i) = iX_i, \quad 1 \leq i \leq 7, \quad t_0(Y) = 5Y;$$

$$h_4(X_i) = X_{i+4}, \quad 1 \leq i \leq 3;$$

$$h_6(X_1) = X_7,$$

$$g_1(X_0) = Y, \quad g_1(X_1) = -Y, \quad g_1(X_2) = 2X_6,$$

$$g_1(X_3) = 4X_7.$$

On en déduit que $\mathfrak{E}_{9,5}^2 \oplus \langle t_0 \rangle$ est la seule algèbre de Lie complexe ayant $\mathfrak{E}_{9,5}^2$ comme nilradical.

4.10 Algèbres de Lie complexes ayant $\mathfrak{E}_{9,5}^3$ comme nilradical

L'ensemble des dérivations $\mathfrak{Der}(\mathfrak{E}_{9,5}^3)$ un espace vectoriel de dimension 13 engendré par les endomorphismes $ad(X_i)$ pour $0 \leq i \leq 6$, $ad(X_8)$ et par :

$$t_0(X_0) = X_0, \quad t_0(X_i) = (i-1)X_i, \quad 1 \leq i \leq 5, \quad t_0(X_6) = 4X_6,$$

$$t_0(X_7) = 5X_7, \quad t_0(X_8) = 3X_8,$$

$$t_1(X_i) = X_i, \quad 1 \leq i \leq 5, \quad t_1(X_i) = 2X_i, \quad i = 6, 7, 8,$$

$$h_1(X_1) = X_8, \quad h_1(X_2) = X_6, \quad h_1(X_3) = X_7,$$

$$h_2(X_0) = X_8, \quad h_3(X_1) = X_7.$$

Toute algèbre de Lie complexe ayant $\mathfrak{E}_{9,5}^3$ comme nilradical, est isomorphe à l'une des algèbres suivantes :

1. $\mathfrak{E}_{9,5}^{3,1}$:

$$[Y, X_0] = X_0, \quad [Y, X_i] = (i-1 + f_1^1)X_i, \quad 1 \leq i \leq 5, \quad [Y, X_6] = (4 + 2f_1^1)X_6,$$

$$[Y, X_7] = (5 + 2f_1^1)X_7, \quad [Y, X_8] = (3 + 2f_1^1)X_8;$$

2. $\mathfrak{E}_{9,5}^{3,2}$:

$$[Y, X_i] = X_i, \quad 1 \leq i \leq 5, \quad [Y, X_i] = 2X_i, \quad i = 6, 7, 8;$$

3. $\mathfrak{E}_{9,5}^{3,3}$:

$$[Y, X_0] = X_0 + X_8, \quad [Y, X_i] = (i-2)X_i, \quad i = 1, 3, 4, 5, \quad [Y, X_6] = 2X_6,$$

$$[Y, X_7] = 3X_7, \quad [Y, X_8] = X_8;$$

4. $\mathfrak{E}_{9,5}^{3,4}$:

$$[Y, X_0] = X_0, \quad [Y, X_1] = -3X_1 + X_8, \quad [Y, X_2] = -2X_2 + X_6, \quad [Y, X_3] = -X_3 + X_7,$$

$$[Y, X_5] = X_5, \quad [Y, X_6] = -2X_6, \quad [Y, X_7] = -X_7, \quad [Y, X_8] = -3X_8;$$

5. $\mathfrak{E}_{9,5}^{3,5}$:

$$[Y, X_0] = X_0, \quad [Y, X_1] = -5X_1 + X_7, \quad [Y, X_i] = (i-6)X_i, \quad 2 \leq i \leq 5, \quad [Y, X_6] = -8X_6,$$

$$[Y, X_7] = -5X_7, \quad [Y, X_8] = -7X_8;$$

6. $\mathfrak{E}_{9,5}^{3,6}$:

$$[Y, X_0] = X_0, \quad [Y, X_i] = (i-1)X_i, \quad 1 \leq i \leq 5, \quad [Y, X_6] = 4X_6, \quad [Y, X_7] = 5X_7,$$

$$[Y, X_8] = 3X_8, \quad [Z, X_i] = X_i, \quad 1 \leq i \leq 5, \quad [Z, X_i] = 2X_i, \quad i = 6, 7, 8.$$

4.11 Démonstration

Afin d'illustrer la méthode générale, nous montrons ici le calcul des algèbres de Lie complexes ayant $\mathcal{L}_{n,r}$ comme nilradical avec $n > 5$. Notons que le chapitre prochain est entièrement dédié au cas où $n = 5$. *Démonstration.* Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie, non scindée, dont le nilradical est $\mathcal{L}_{n,r}$ avec $n > 5$. Si \mathfrak{g} est de dimension n , elle est évidemment isomorphe à $\mathcal{L}_{n,r}$, dans le cas contraire, elle se décompose de la façon $\mathcal{L}_{5,3} \oplus \mathfrak{t}$. De plus, pour tout $Y \in \mathfrak{t}$, la transformation linéaire $f = ad(Y) |_{\mathcal{L}_{n,r}}$ est une dérivation du nilradical $\mathfrak{L}_{n,r}$, et donc, elle peut être représentée, dans la base $\{X_0, \dots, X_{n-1}\}$, par la matrice triangulaire :

$$\begin{pmatrix} f_0^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ f_0^1 & f_1^1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ f_0^2 & f_1^2 & f_0^0 + f_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ f_0^3 & 0 & f_1^2 & 2f_0^0 + f_1^1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ f_0^4 & f_1^4 & 0 & f_1^2 & 3f_0^0 + f_1^1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_0^{r-2} & 0 & f_1^{r-3} & 0 & f_1^{r-5} & \dots & (r-2)f_0^0 + f_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ f_0^{r-1} & f_1^{r-1} & 0 & f_1^{r-3} & 0 & \dots & f_1^2 & (r-1)f_0^0 + f_1^1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ f_0^r & f_1^r & f_1^{r-1} & 0 & f_1^{r-3} & \dots & 0 & f_1^2 & rf_0^0 + f_1^1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_0^{n-2} & f_1^{n-2} & f_1^{n-3} & f_1^{n-4} & f_1^{n-5} & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & (n-3)f_0^0 + f_1^1 & 0 \\ f_0^{n-1} & f_1^{n-1} & -f_0^{r-1} & f_0^{r-2} & -f_1^{r-3} & \dots & -f_0^2 & f_0^1 & 0 & \dots & 0 & (r-2)f_0^0 + 2f_1^1 \end{pmatrix}$$

On peut supposer que f est une dérivation externe, les coefficients $f_1^2, f_0^2, f_0^3, \dots, f_0^{n-2}$ sont alors égaux à zéro.

La dimension de \mathfrak{t} est inférieure ou égale à 2. En effet, si elle était supérieure ou égale à 3, on pourrait trouver une dérivation, associée à un élément de \mathfrak{t} , externe et nilpotente qui commute avec les autres dérivations associées aux éléments de \mathfrak{t} , $\mathfrak{L}_{n,r}$ ne serait donc pas le nilradical de \mathfrak{g} .

Pour chaque dimension de \mathfrak{t} , on sépare la démonstration selon les possibles valeurs de f_0^0 et de f_1^1 , l'un des deux, au moins étant non nul.

$\dim \mathfrak{t} = 1$: \mathfrak{t} est engendré par un vecteur Y tel que $f = ad(Y) |_{\mathcal{L}_{n,r}}$ est une dérivation externe de $\mathfrak{L}_{n,r}$.

1. Soit $f_0^0 \neq 0$, en faisant un changement d'échelle, on pose $f_0^0 = 1$.
 - (a) Si $f_1^1 \neq 1, 2 - r, \frac{r-3}{2}$, toutes les valeurs propres de f sont différentes et il est possible de diagonaliser f sans changer les crochets du nilradical. D'où $f \sim \text{diag}(1, f_1^1, 1 + f_1^1, \dots, n - 3 + f_1^1, r - 2 + 2f_1^1)$ et on en déduit l'algèbre $\mathfrak{L}_{n,r}^{n+1,1}$.
 - (b) Si $f_1^1 = 2 - r$, on pose $f_0^1 = f_0^{n-1} = 0$. En imposant $f_1^{n-1} = 0$, on obtient l'algèbre $\mathfrak{L}_{n,r}^{n+1,1}$ avec $f_1^1 = 2 - r$. On peut alors supposer $f_1^{n-1} \neq 0$ et en faisant un changement de base du nilradical on peut prendre $f_1^{n-1} = 1$.

$$f \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 - r & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 - r & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n - 1 - r & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 2 - r \end{pmatrix}$$

On obtient l'algèbre $\mathfrak{L}_{n,r}^{n+1,3}$.

- (c) Si $f_1^1 = \frac{3-r}{2}$, un changement de variables nous permet de prendre f_0^1 et f_1^{n-1} égaux à zéro et $f_0^{n-1} = 1$. Dans ce cas, f est représentée par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3-r}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5-r}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{2n-3-r}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on obtient l'algèbre $\mathfrak{L}_{n,r}^{n+1,5}$.

- (d) Si $f_1^1 = 1$, on peut prendre $f_0^{n-1} = f_1^{n-1} = 0$ et $f_0^1 = 1$, d'où :

$$f \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & n-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & r \end{pmatrix}.$$

On obtient l'algèbre $\mathfrak{L}_{n,r}^{n+1,4}$.

2. Supposons maintenant $f_0^0 = 0$. Comme f ne peut pas être nilpotente, f_1^1 est non nul. Un changement d'échelle, nous permet supposer $f_1^1 = 1$. On peut aussi prendre $f_0^1 = f_1^{n-1} = f_0^1 = 0$ et on obtient les algèbres $\mathfrak{L}_{n,r}^{n+1,2}$ et $\mathfrak{L}_{n,r}^{n+1,6}$.

$\dim \mathfrak{t} = 2$: Aux deux générateurs de \mathfrak{t} , on peut faire correspondre deux dérivations de $\mathcal{L}_{n,r}$, nommées f et g . Puisqu'elles sont linéairement indépendantes, on peut prendre $f_0^0 = g_1^1 = 1$ et $g_0^0 = 0$. On peut aussi choisir f de façon à ce que tous ses valeurs propres soient différentes et elle est donc diagonalisable. Comme le crochet entre f et g ne peut pas donner une transformation nilpotente, il est nécessairement nul. On en déduit que les deux dérivations se diagonalisent simultanément. En ajoutant à f un multiple de g , elles se représentent par les matrices diagonales

$$\begin{aligned} f &\sim \text{diag}(1, 0, 1, 2, 3, \dots, n-3, r-2) \\ g &\sim \text{diag}(0, 1, 1, 1, 1, \dots, 1, 2). \end{aligned}$$

Il n'existe donc qu'une seule algèbre de dimension $n+2$ ayant $\mathfrak{L}_{n,r}$ comme nilradical. Cette algèbre est appelée $\mathfrak{L}_{n,r}^{n+2,1}$.

On remarque finalement que toutes les algèbres ici obtenues sont résolubles.

Chapitre 5

Classification des algèbres ayant un nilradical isomorphe à $\mathcal{L}_{5,3}$

Dans le chapitre précédent, on a montré que les algèbres filiformes ne peuvent pas être le radical, ni le nilradical de la somme semi-directe, non décomposable, $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus_R \mathfrak{r}$ de l'algèbre semi-simple \mathfrak{s} et de l'algèbre résoluble \mathfrak{r} par rapport à une représentation R de \mathfrak{s} . Les algèbres filiformes ne présentent donc aucun intérêt dans l'étude des algèbres filiformes.

Nous allons voir maintenant que ce fait ne se généralise pas aux algèbres quasi-filiformes car il existe des algèbres de Lie non résolubles dont le nilradical est quasi-filiforme.

Nous allons, pour cela, considérer l'algèbre $\mathcal{L}_{5,3}$. Rappelons que, dans la base $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4\}$, elle est définie par les crochets :

$$[X_0, X_1] = X_2, \quad [X_0, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_2] = X_4. \quad (5.1)$$

5.1 Algèbres de petite dimension ayant $\mathcal{L}_{5,3}$ comme nilradical

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie réelle non décomposable de dimension 6 ou 7, dont le nilradical est isomorphe à $\mathcal{L}_{5,3}$. Pour ces dimensions, \mathfrak{g} est résoluble et donc son algèbre dérivée est nilpotente et de plus :

$$[\mathfrak{t}, \mathfrak{t}] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathcal{L}_{5,3} \quad (5.2)$$

Ainsi, \mathfrak{g} se décompose comme $\mathfrak{g} = \mathcal{L}_{5,3} \vec{\oplus} \mathfrak{t}$ où $\vec{\oplus}$ dénote la somme semi-directe et $[\mathfrak{t}, \mathfrak{t}] \subseteq \mathcal{L}_{5,3}$.

Proposition 12 *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie réelle non décomposable de dimension 6, ayant un nilradical isomorphe à $\mathcal{L}_{5,3}$. Alors, \mathfrak{g} est isomorphe à l'une des algèbres résolubles $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,1}, \dots, \mathfrak{g}_{5,3}^{6,9}$ représentées dans la base $\{X_0, \dots, X_4, Y\}$ par (5.1) et les crochets faisant intervenir Y :*

1. $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,1}$:
 $[Y, X_0] = X_0, \quad [Y, X_i] = (i - 1 + \lambda)X_i \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \quad [Y, X_4] = (1 + 2\lambda)X_4.$
2. $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,2}$:
 $[Y, X_i] = X_i \quad \text{pour } i = 0, 3, \quad [Y, X_1] = -X_1 + X_4, \quad [Y, X_4] = -X_4.$

3. $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,3}$:
 $[Y, X_0] = X_0 + X_4, \quad [Y, X_2] = X_2, \quad [Y, X_3] = 2X_3, \quad [Y, X_4] = X_4.$
4. $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,4}$:
 $[Y, X_0] = X_0 - X_4, \quad [Y, X_2] = X_2, \quad [Y, X_3] = 2X_3, \quad [Y, X_4] = X_4.$
5. $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,5}$:
 $[Y, X_0] = X_0 + X_1, \quad [Y, X_i] = iX_i \quad \text{pour } i = 1, 2, 4, \quad [Y, X_3] = 3X_3 + X_4.$
6. $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,6}$:
 $[Y, X_0] = X_0 - X_1, \quad [Y, X_1] = X_0 + X_1, \quad [Y, X_2] = 2X_2, \quad [Y, X_3] = 3X_3 - X_4,$
 $[Y, X_4] = X_3 + 3X_4.$
7. $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,7}$:
 $[Y, X_i] = -X_{i+1} \quad \text{pour } i = 0, 3, \quad [Y, X_i] = X_{i-1} \quad \text{pour } i = 1, 4.$
8. $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,8}$:
 $[Y, X_0] = -X_1 + X_4, \quad [Y, X_1] = X_0, \quad [Y, X_3] = -X_4, \quad [Y, X_4] = X_3.$
9. $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,9}$:
 $[Y, X_0] = -X_1 - X_4, \quad [Y, X_1] = X_0, \quad [Y, X_3] = -X_4, \quad [Y, X_4] = X_3.$

Démonstration. Supposons que \mathfrak{g} vérifie les hypothèses du théorème. En suivant les notations précédentes, \mathfrak{t} est engendré par le vecteur Y tel que $f = \text{ad}(Y) |_{\mathcal{L}_{5,3}}$ est une dérivation de $\mathcal{L}_{5,3}$. On considère la base $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4\}$ de (5.1) et on pose $f(X_j) = \sum_{i=0}^4 f_j^i X_i$ pour $j = 0, \dots, 4$, le calcul direct nous permet d'obtenir la forme générale de la matrice $\{f_j^i\}_{i,j \in \{0,1,2,3,4\}}$:

$$\begin{pmatrix} f_0^0 & f_1^0 & 0 & 0 & 0 \\ f_0^1 & f_1^1 & 0 & 0 & 0 \\ f_0^2 & f_1^2 & f_0^0 + f_1^1 & 0 & 0 \\ f_0^3 & f_1^3 & f_1^2 & 2f_0^0 + f_1^1 & f_1^0 \\ f_0^4 & f_1^4 & -f_0^2 & f_0^1 & f_0^0 + 2f_1^1 \end{pmatrix}$$

Le changement de variables $Y \rightarrow Y - f_1^2 X_0 + f_0^2 X_1 + f_0^3 X_2$, nous donne :

$$f \sim \begin{pmatrix} f_0^0 & f_1^0 & 0 & 0 & 0 \\ f_0^1 & f_1^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_0^0 + f_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & f_1^3 & 0 & 2f_0^0 + f_1^1 & f_1^0 \\ f_0^4 & f_1^4 & 0 & f_0^1 & f_0^0 + 2f_1^1 \end{pmatrix}$$

1. Supposons $f_1^0 = 0$, on examine alors tous les cas qui découlent des possibles valeurs de f_0^0 et f_1^1 , l'un des deux paramètres, au moins, devant être non nul.
 - (a) Soit $f_0^0 \neq 0$, en faisant un changement d'échelle, on peut prendre $f_0^0 = 1$.
 - i. Si $f_1^1 \notin \{-1, 0, 1\}$, un changement de variables du nilradical, nous permet d'annuler les paramètres f_0^1, f_0^4 et f_1^4 . On a alors :

$$f \sim \text{diag}(1, f_1^1, 1 + f_1^1, 2 + f_1^1, 1 + 2f_1^1),$$

$$\begin{cases} [Y, X_0] &= X_0, \\ [Y, X_1] &= f_1^1 X_1, \\ [Y, X_2] &= (1 + f_1^1) X_2, \\ [Y, X_3] &= (2 + f_1^1) X_3, \\ [Y, X_4] &= (1 + 2f_1^1) X_4, \end{cases}$$

et on obtient la famille d'algèbres $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,1}(f_1^1)$ décrite dans la proposition 12.

- ii. Si $f_1^1 = -1$, les paramètres f_0^1 et f_0^4 peuvent être éliminés. Quand $f_1^4 = 0$, on se ramène à l'algèbre $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,1}(-1)$ ce qui nous permet de supposer $f_1^4 \neq 0$. En faisant le changement de variables $X_i \rightarrow f_1^4 X_i$ pour $i = 1, 2, 3$, $X_4 \rightarrow (f_1^4)^2 X_4$, on a $f_1^4 = 1$. Par conséquent,

$$f \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} [Y, X_0] &= X_0 \\ [Y, X_1] &= -X_1 + X_4 \\ [Y, X_2] &= 0 \\ [Y, X_3] &= X_3 \\ [Y, X_4] &= -X_4 \end{cases}$$

et on obtient l'algèbre $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,2}$.

- iii. Si $f_1^1 = 0$, on annule le paramètre f_1^4 . Quand $f_0^4 = 0$, on récupère l'algèbre $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,1}(\mathbf{o})$ et on peut alors supposer $f_0^4 = 1$, dans \mathbb{C} et $f_0^4 = \pm 1$ dans \mathbb{R} .

On en déduit que :

$$f \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \delta & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} [Y, X_0] &= X_0 + \delta X_4 \\ [Y, X_1] &= 0 \\ [Y, X_2] &= X_2 \\ [Y, X_3] &= 2X_3 \\ [Y, X_4] &= X_4 \end{cases}$$

avec $\delta = 1$ dans \mathbb{C} et $\delta = \pm 1$ dans \mathbb{R} . On obtient ainsi les algèbres $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,3}$ et $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,4}$.

- iv. Si $f_1^1 = 1$, on prend $f_0^4 = f_1^4 = 0$ et $f_0^1 = 1$.

$$f \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} [Y, X_0] &= X_0 + X_1 \\ [Y, X_1] &= X_1 \\ [Y, X_2] &= 2X_2 \\ [Y, X_3] &= 3X_3 + X_4 \\ [Y, X_4] &= 3X_4 \end{cases}$$

On obtient l'algèbre $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,5}$.

- (b) Supposons maintenant $f_0^0 = 0$. Comme f ne peut pas être nilpotente, $f_1^1 \neq 0$ et en faisant un changement d'échelle, on a $f_1^1 = 1$. On peut aussi prendre $f_0^1 = f_0^4 = f_1^4 = 0$.

Pour $f_1^3 = 0$, on en déduit :

$$f \sim \text{diag}(0, 1, 1, 1, 2) \quad \begin{cases} [Y, X_0] &= 0 \\ [Y, X_1] &= X_1 \\ [Y, X_2] &= X_2 \\ [Y, X_3] &= X_3 \\ [Y, X_4] &= 2X_4 \end{cases}$$

Pour $f_1^3 \neq 0$, on peut poser $f_1^3 = 1$ dans \mathbb{C} et $f_1^3 = \pm 1$ dans \mathbb{R} , ainsi :

$$f \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} [Y, X_0] & = & 0 \\ [Y, X_1] & = & X_1 + \delta X_3 \\ [Y, X_2] & = & X_2 \\ [Y, X_3] & = & X_3 \\ [Y, X_4] & = & 2X_4 \end{array} \right.$$

avec $\delta = 1$ dans \mathbb{C} et $\delta = \pm 1$ dans \mathbb{R} .

Ces cas nous donnent les algèbres $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,1}(\mathfrak{o})$, $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,3}$ et $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,5}$ grâce au changement de base :

$$\begin{aligned} X_0 &\rightarrow X_1 \\ X_1 &\rightarrow X_0 \\ X_2 &\rightarrow -X_2 \\ X_3 &\rightarrow -X_4 \\ X_4 &\rightarrow -X_3 \end{aligned}$$

2. Si $f_1^0 \neq 0$, le changement de variables $X_0 \rightarrow f_1^0 X_0$, $X_i \rightarrow (f_1^0)^{i-1} X_i$ pour $i = 1, 2, 3$ et $X_4 \rightarrow f_1^0 X_4$ nous permet de supposer $f_1^0 = 1$. Le polynôme caractéristique associé à f est donc :

$$(f_0^0 + f_1^1 - \lambda) \underbrace{[(f_0^0 - \lambda)(f_1^1 - \lambda) - f_0^1]}_{p(\lambda)} \underbrace{[(2f_0^0 + f_1^1 - \lambda)(f_0^0 + 2f_1^1 - \lambda) - f_0^1]}_{q(\lambda)}$$

Remarquons que λ est une racine de p si et seulement si $\lambda + f_0^0 + f_1^1$ est une racine de q , il est donc suffisant de trouver les racines de p :

$$\lambda_{\pm} = \frac{\xi \pm \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{où} \quad \xi = f_0^0 + f_1^1 \quad \text{et} \quad \Delta = (f_0^0 + f_1^1)^2 - 4(f_0^0 f_1^1 - f_0^1).$$

Quand $\Delta > 0$, les valeurs propres de f sont :

$$\frac{\xi - \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \frac{\xi + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \xi, \quad \frac{3\xi - \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \frac{3\xi + \sqrt{\Delta}}{2}.$$

En faisant le changement de base :

$$\begin{aligned} X_0 &\rightarrow X_0 + \alpha X_1 \\ X_1 &\rightarrow X_1 + \beta X_0 \\ X_2 &\rightarrow (1 - \alpha\beta)X_2 \\ X_3 &\rightarrow (1 - \alpha\beta)(X_3 + \alpha X_4) \\ X_4 &\rightarrow (1 - \alpha\beta)(X_4 + \beta X_3) \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{-f_0^0 + f_1^1 - \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{2}{-f_0^0 + f_1^1 + \sqrt{\Delta}}.$$

Il en résulte :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} [Y, X_0] & = & \frac{\xi - \sqrt{\Delta}}{2} X_0 + f_0^4 X_4 \\ [Y, X_1] & = & \frac{\xi + \sqrt{\Delta}}{2} X_1 + f_1^3 X_3 + f_1^4 X_4 \\ [Y, X_2] & = & \xi X_2 \\ [Y, X_3] & = & \frac{3\xi - \sqrt{\Delta}}{2} X_3 \\ [Y, X_4] & = & \frac{3\xi + \sqrt{\Delta}}{2} X_4 \end{array} \right.$$

On récupère dans ce cas la famille d'algèbres $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,1}(\lambda)$.

Pour $\Delta = 0$, les valeurs propres de f sont $\frac{\xi}{2}$, ξ , $\frac{3\xi}{2}$ et en faisant le changement de base $X_0 \rightarrow X_0 + \alpha X_1$, $X_3 \rightarrow X_3 + \alpha X_4$ avec $\alpha = \frac{-f_0^0 + f_1^1}{2}$, on obtient :

$$f \sim \begin{pmatrix} \frac{\xi}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\xi}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & f_1^3 & 0 & \frac{3\xi}{2} & 0 \\ f_0^4 & f_1^4 & 0 & 0 & \frac{3\xi}{2} \end{pmatrix}.$$

En raison de la non nilpotence de f , on peut prendre ξ égal à 1 et $f_0^4 = f_1^4 = f_1^3 = 0$, par conséquent :

$$\begin{cases} [Y, X_0] = X_0 \\ [Y, X_1] = X_0 + X_1 \\ [Y, X_2] = 2X_2 \\ [Y, X_3] = 3X_3 \\ [Y, X_4] = X_3 + 3X_4 \end{cases}$$

Le changement de variables suivant, nous ramène à l'algèbre $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,5}$.

$$\begin{aligned} X_0 &\rightarrow X_1 \\ X_1 &\rightarrow X_0 \\ X_2 &\rightarrow -X_2 \\ X_3 &\rightarrow -X_4 \\ X_4 &\rightarrow -X_3 \end{aligned}$$

Quand $\Delta < 0$, on n'obtient pas de nouvelles algèbres dans le cas complexe. Dans \mathbb{R} , grâce au changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} X_0 &\rightarrow 2X_0 + \alpha X_1 \\ X_1 &\rightarrow \sqrt{-\Delta} X_1 \\ X_2 &\rightarrow 2\sqrt{-\Delta} X_2 \\ X_3 &\rightarrow 2\sqrt{-\Delta}(2X_3 + \alpha X_4) \\ X_4 &\rightarrow -2\Delta X_4 \end{aligned} \quad \text{où} \quad \alpha = -f_0^0 + f_1^1,$$

on a :

$$f \sim \begin{pmatrix} \frac{\xi}{2} & \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} & \frac{\xi}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & f_1^3 & 0 & \frac{3\xi}{2} & \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \\ f_0^4 & f_1^4 & 0 & -\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} & \frac{3\xi}{2} \end{pmatrix}.$$

Si ξ est non nul, on fait un changement d'échelle de f , ce qui nous donne l'algèbre $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,6}$.

Si $\xi = 0$, on peut éliminer f_1^3 et f_1^4 . On obtient alors les algèbres $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,7}$ quand $f_0^4 = 0$ et les algèbres $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,8}$ et $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,9}$, dans le cas contraire.

Proposition 13 *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie réelle non décomposable de dimension 7 dont le nilradical est isomorphe à $\mathcal{L}_{5,3}$. Alors, \mathfrak{g} est isomorphe à l'algèbre $\mathfrak{g}_{5,3}^{7,1}$ ou bien à $\mathfrak{g}_{5,3}^{7,2}$, chacune d'entre elles étant définie dans la base $\{X_0, \dots, X_4, Y, Z\}$ par (5.1) et les crochets faisant intervenir Y et Z :*

1. $\mathfrak{g}_{5,3}^{7,1} : [Y, X_i] = X_i$ pour $i = 0, 2, 4$, $[Y, X_3] = 2X_3$,
 $[Z, X_i] = X_i$ pour $i = 1, 2, 3$, $[Z, X_4] = 2X_4$.

2. $\mathfrak{g}_{5,3}^{Z,2} : [Y, X_i] = -X_{i+1}$ pour $i = 0, 3$, $[Y, X_i] = X_{i-1}$ pour $i = 1, 4$,
 $[Z, X_0] = X_0$, $[Z, X_i] = iX_i$ pour $i = 1, 2, 3$, $[Z, X_4] = 3X_4$.

Démonstration. Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie non décomposable de dimension 7 ayant $\mathcal{L}_{5,3}$ comme nilradical. Elle se décompose alors de la façon $\mathcal{L}_{5,3} \oplus \mathfrak{t}$ où \mathfrak{t} est engendré par les vecteurs Y et Z tels que $f = \text{ad}(Y)|_{\mathcal{L}_{5,3}}$ et $g = \text{ad}(Z)|_{\mathcal{L}_{5,3}}$ sont des dérivations de $\mathcal{L}_{5,3}$.

1. Si $f_1^0 = g_1^0 = 0$, en prenant si nécessaire des combinaisons linéaires de f et g on peut supposer $f_1^1 = g_0^0 = 0$ et $f_0^0 = g_1^1 = 1$. Comme les valeurs propres de $f + 2g$ et de $f + 3g$ sont toutes différentes, elles sont diagonalisables, par conséquent f et g le sont aussi. Il s'en suit que :

$$\begin{aligned} f &\sim \text{diag}(1, 0, 1, 2, 1) & g &\sim \text{diag}(0, 1, 1, 1, 2) \\ \left\{ \begin{array}{l} [Y, X_0] = X_0 \\ [Y, X_1] = 0 \\ [Y, X_2] = X_2 \\ [Y, X_3] = 2X_3 \\ [Y, X_4] = X_4 \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} [Z, X_0] = 0 \\ [Z, X_1] = X_1 \\ [Z, X_2] = X_2 \\ [Z, X_3] = X_3 \\ [Z, X_4] = 2X_4 \end{array} \right. \end{aligned}$$

et on obtient l'algèbre $\mathfrak{g}_{5,3}^{Z,1}$.

2. Si $f_1^0 \neq 0$ ou $g_1^0 \neq 0$, sans perte de généralité, on peut supposer $f_1^0 = 1$ et $g_1^0 = 0$. La condition (5.2), implique que le crochet de f et g est une dérivation interne, alors, $g_0^0 = 0$ et $g_0^0 = g_1^1$. De plus, g_0^0 est non nul puisque g ne peut pas être nilpotente. En faisant le changement $f \rightarrow f - \frac{f_0^0}{g_0^0}g$, $g \rightarrow \frac{1}{g_0^0}g$, les deux dérivations s'écrivent de la façon suivante :

$$f \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ f_0^1 & f_1^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & f_1^3 & 0 & f_1^1 & 1 \\ f_0^4 & f_1^4 & 0 & f_0^1 & 2f_1^1 \end{pmatrix} \quad g \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & g_1^3 & 0 & 3 & 0 \\ g_0^4 & g_1^4 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- (a) Si $f_0^1 = 0$, on prend $f_1^1 = 1$. Les dérivations f et g sont diagonalisables, ce qui nous ramène au cas précédent.
- (b) Si $f_0^1 \neq 0$, on peut prendre f_0^1 égal à 1 sur \mathbb{C} , ou bien à ± 1 sur \mathbb{R} . Sans changer la forme de f , il est possible de diagonaliser g .

i. Pour $f_0^1 = 1$, f est aussi diagonalisable ce qui nous ramène à l'algèbre $\mathfrak{g}_{5,3}^{Z,1}$.

ii. Pour $f_0^1 = -1$ et $|f_1^1| < 2$, en faisant le changement de variables :

$$\begin{aligned} X_0 &\rightarrow 2X_0 + f_1^1 X_1 \\ X_1 &\rightarrow \sqrt{-\Delta} X_1 \\ X_2 &\rightarrow 2\sqrt{-\Delta} X_2 \\ X_3 &\rightarrow 2\sqrt{-\Delta}(2X_3 + f_1^1 X_4) \\ X_4 &\rightarrow -2\Delta X_4 \\ f &\rightarrow \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}(f - \frac{f_1^1}{2}g) \text{ where } \Delta = (f_1^1)^2 - 4 \end{aligned}$$

on obtient :

$$f \sim \left(\begin{array}{c|c|c} R & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & R \end{array} \right), \quad \text{avec } R \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad g \sim \text{diag}(1, 1, 2, 3, 3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [Y, X_0] = -X_1 \\ [Y, X_1] = X_0 \\ [Y, X_2] = 0 \\ [Y, X_3] = -X_4 \\ [Y, X_4] = X_3 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} [Z, X_0] = X_0 \\ [Z, X_1] = X_1 \\ [Z, X_2] = 2X_2 \\ [Z, X_3] = 3X_3 \\ [Z, X_4] = 3X_4 \end{array} \right.$$

Il en résulte une nouvelle algèbre $\mathfrak{g}_{5,3}^{7,1}$.

- iii. Pour $f_0^1 = -1$ et $|f_1^1| > 2$, on récupère l'algèbre $\mathfrak{g}_{5,3}^{7,1}$ car f est diagonalisable.
- iv. Pour $f_0^1 = -1$ et $|f_1^1| = \pm 2$, le changement de base $X_0 \rightarrow X_0 \pm X_1$, $X_3 \rightarrow X_3 \pm X_4$, nous permet d'écrire f et g de la façon suivante :

$$f \sim \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad g \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$f - g$ serait alors nilpotente ce qui est impossible.

5.2 Algèbres ayant $\mathcal{L}_{5,3}$ comme nilradical

Proposition 14 Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie réelle non décomposable dont le nilradical est isomorphe à $\mathcal{L}_{5,3}$.

1. Si \mathfrak{g} est résoluble alors $\dim \mathfrak{g} \leq 7$ et elle est isomorphe à l'une des algèbres suivantes :
 - (a) $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,1}, \dots, \mathfrak{g}_{5,3}^{6,9}$ pour $\dim \mathfrak{g} = 6$.
 - (b) $\mathfrak{g}_{5,3}^{7,1}$ or $\mathfrak{g}_{5,3}^{7,2}$ pour $\dim \mathfrak{g} = 7$.
2. Si \mathfrak{g} n'est pas résoluble alors \mathfrak{g} est de dimension 8 ou 9 et elle est isomorphe soit à :
 - (a) l'algèbre $\mathfrak{g}_{5,3}^{8,1}$ représentée dans la base $\{X_0, \dots, X_4, Y, Z, V\}$ par (5.1) et les crochets faisant intervenir Y, Z et V :
$$\begin{aligned} [Y, X_0] &= X_0, & [Y, X_1] &= -X_1, & [Y, X_3] &= X_3, & [Y, X_4] &= -X_4, \\ [Z, X_1] &= X_0, & [Z, X_4] &= X_3, \\ [V, X_0] &= X_1, & [V, X_3] &= X_4, \\ [Y, Z] &= 2Z, & [Y, V] &= -2V, & [Z, V] &= Y. \end{aligned}$$
 - (b) soit à l'algèbre $\mathfrak{g}_{5,3}^{9,1}$ représentée dans la base $\{X_0, \dots, X_4, Y, Y', Z, V\}$ par (5.1) et les crochets faisant intervenir Y, Y', Z et V :
$$\begin{aligned} [Y, X_0] &= X_0, & [Y, X_1] &= -X_1, & [Y, X_3] &= X_3, & [Y, X_4] &= -X_4, \\ [Y', X_1] &= X_1, & [Y', X_2] &= X_2, & [Y', X_3] &= X_3, & [Y', X_4] &= 2X_4, \\ [Z, X_1] &= X_0, & [Z, X_4] &= X_3, \\ [V, X_0] &= X_1, & [V, X_3] &= X_4, \\ [Y, Z] &= Z, & [Y, V] &= -V, & [Y', Z] &= -Z, & [Y', V] &= V, \\ [Z, V] &= Y - Y'. \end{aligned}$$

La classification des algèbres de Lie complexes ayant $\mathcal{L}_{5,3}$ comme nilradical est analogue à la classification réelle, en tenant compte des isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_{5,3}^{6,3} \otimes \mathbb{C} &\sim \mathfrak{g}_{5,3}^{6,4} \otimes \mathbb{C} \\
\mathfrak{g}_{5,3}^{6,6} \otimes \mathbb{C} &\sim \mathfrak{g}_{5,3}^{6,1} \left(\frac{1+i}{1-i} \right) \otimes \mathbb{C} \\
\mathfrak{g}_{5,3}^{6,7} \otimes \mathbb{C} &\sim \mathfrak{g}_{5,3}^{6,1} (-1) \otimes \mathbb{C} \\
\mathfrak{g}_{5,3}^{6,8} \otimes \mathbb{C} &\sim \mathfrak{g}_{5,3}^{6,9} \otimes \mathbb{C} \sim \mathfrak{g}_{5,3}^{6,3} \otimes \mathbb{C} \\
\mathfrak{g}_{5,3}^{7,1} \otimes \mathbb{C} &\sim \mathfrak{g}_{5,3}^{7,2} \otimes \mathbb{C}
\end{aligned}$$

Notons que l'algèbre $\mathfrak{g}_{5,3}^{8,1} \otimes \mathbb{C}$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus_{D_{1/2}+D_{1/2}+D_0} \mathcal{L}_{5,3}$ et qu'elle constitue une sous-algèbre de $\mathfrak{g}_{5,3}^{9,1} \otimes \mathbb{C}$.

Démonstration. Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie réelle, non décomposable, dont le nilradical est $\mathcal{L}_{5,3}$. Si \mathfrak{g} est de dimension 5, il est clair qu'elle est isomorphe à $\mathcal{L}_{5,3}$, dans le cas contraire, \mathfrak{g} se décompose comme $\mathcal{L}_{5,3} \oplus \mathfrak{t}$. Nous avons précédemment cherché les algèbres de cette forme lorsque la dimension de \mathfrak{t} est égale à 1 ou bien à 2.

Supposons maintenant que \mathfrak{t} est de dimension 3, les vecteurs générateurs de \mathfrak{t} sont associés à trois dérivations de $\mathcal{L}_{5,3}$ que l'on nomme f , g et h . Deux cas sont possibles.

1. Supposons que les dérivations f , g et h sont de la forme :

$$f \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_0^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & f_1^3 & 0 & 2 & 0 \\ f_0^4 & f_1^4 & 0 & f_0^1 & 1 \end{pmatrix}, g \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_0^1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & g_1^3 & 0 & 1 & 0 \\ g_0^4 & g_1^4 & 0 & g_0^1 & 2 \end{pmatrix}, h \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ h_0^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1^3 & 0 & 0 & 1 \\ h_0^4 & h_1^4 & 0 & h_0^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule les crochets entre ces dérivations :

$$\begin{aligned}
[f, g] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -f_0^1 - g_0^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_1^3 g_0^1 - g_1^3 f_0^1 & 2g_1^3 & 0 & 0 & 0 \\ f_1^4 g_0^1 - g_1^4 f_0^1 - 2f_0^4 & -f_1^4 + f_0^1 g_1^3 + g_1^4 - g_0^1 f_1^3 & 0 & -f_0^1 - g_0^1 & 0 \end{pmatrix}, \\
[g, h] &= \begin{pmatrix} -g_0^1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ h_0^1 & g_0^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_1^3 h_0^1 - g_0^4 - h_1^3 g_0^1 & -g_1^4 & 0 & -g_0^1 & -1 \\ g_1^4 h_0^1 - h_1^4 g_0^1 + 2h_0^4 & g_0^1 h_1^3 + g_0^4 - g_1^3 h_0^1 + h_1^4 & 0 & h_0^1 & g_0^1 \end{pmatrix}, \\
[h, f] &= \begin{pmatrix} f_0^1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ h_0^1 & -f_0^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1^3 f_0^1 + f_0^4 + f_1^3 h_0^1 & f_1^4 - 2h_1^3 & 0 & f_0^1 & -1 \\ h_1^4 f_0^1 - f_1^4 h_0^1 & h_0^1 f_1^3 - f_0^4 - h_1^3 f_0^1 - h_1^4 & 0 & h_0^1 & -f_0^1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ces crochets ne peuvent donner que des combinaisons linéaires de f , g , h et des dérivations internes de $\mathcal{L}_{5,3}$, on en déduit les conditions suivantes :

$$\begin{cases} g_0^1 &= -f_0^1 \\ h_0^1 &= (f_0^1)^2 \end{cases}$$

En considérant le changement de base $X_0 \rightarrow X_0 + f_0^1 X_1$, $X_3 \rightarrow X_3 + f_0^1 X_4$ et $h \rightarrow h - f_0^1 f + f_0^1 g$, on obtient les crochets :

$$[f, g] = 0, \quad [f, h] = h, \quad [g, h] = -h.$$

Or ceci nous mène à une contradiction. En effet, l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{L}_{5,3}$ et le vecteur associé à h est idéal nilpotent.

2. Par ailleurs, si f , g et h sont de la forme :

$$f \sim \begin{pmatrix} f_0^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_1^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_0^0 + f_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & f_1^3 & 0 & 2f_0^0 + f_1^1 & 0 \\ f_0^4 & f_1^4 & 0 & 0 & f_0^0 + 2f_1^1 \end{pmatrix}, g \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_1^3 & 0 & 0 & 1 \\ g_0^4 & g_1^4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$h \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1^3 & 0 & 0 & 0 \\ h_0^4 & h_1^4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Du crochet :

$$[g, h] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_0^4 + g_1^3 & h_1^4 & 0 & 1 & 0 \\ -g_1^4 & h_0^4 + g_1^3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

on en déduit que $f_0^0 = -f_1^1 = 1$.

Les autres crochets faisant intervenir f , g et h sont :

$$[f, g] = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -f_0^4 & 2g_1^3 - f_1^4 & 0 & 0 & 2 \\ -2g_0^4 & f_0^4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[f, h] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -h_0^4 - g_1^3 & 2h_1^3 & 0 & 0 & 0 \\ -g_1^4 & -f_1^3 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que $f_1^3 = f_0^4 = f_1^4 = g_1^3 = g_0^4 = g_1^4 = h_1^3 = h_0^4 = h_1^4 = 0$. Les dérivations f , g et h sont alors données par :

$$f \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, g \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, h \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les crochets entre ces dérivations sont :

$$[g, h] = f; \quad [f, g] = 2g; \quad [f, h] = -2h.$$

On obtient ainsi l'algèbre $\mathfrak{g}_{5,3}^{8,1}$.

Finalement, si la dimension de \mathfrak{t} est 4, on peut supposer que les dérivations correspondantes aux générateurs de \mathfrak{t} sont :

$$f \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & f_1^3 & 0 & 2 & 0 \\ f_0^4 & f_1^4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, f' \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & f_1^3 & 0 & 1 & 0 \\ f_0^4 & f_1^4 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, g \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_1^3 & 0 & 0 & 1 \\ g_0^4 & g_1^4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$h \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1^3 & 0 & 0 & 0 \\ h_0^4 & h_1^4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le calcul des crochets entre ces dérivations et un simple changement de base du nilradical, nous donne $f_1^3 = f_0^4 = f_1^4 = f_1^3 = f_0^4 = f_1^4 = g_1^3 = g_0^4 = g_1^4 = h_1^3 = h_0^4 = h_1^4 = 0$, d'où :

$$\begin{aligned} [f, f'] &= 0, & [f, g] &= g, & [f, h] &= -h, \\ [g, h] &= f - f', & [f', g] &= -g, & [f', h] &= h, \end{aligned}$$

On déduit ainsi l'algèbre $\mathfrak{g}_{5,3}^{9,1}$.

Remarquons que la dimension de \mathfrak{t} est au plus 4. En effet, si la dimension de \mathfrak{t} était supérieure ou égale à 5, on pourrait trouver une dérivation externe nilpotente qui commute avec les dérivations correspondantes aux générateurs de \mathfrak{t} .

Remarque. La classification des algèbres de Lie de dimension six sur les corps des réels et des complexes se trouve dans une série d'articles écrits par Mubarakzhanov entre 1963 et 1966 [40]. Plus tard, elle fut corrigée et complétée par plusieurs auteurs [15, 50]. Cependant, elle contient toujours des erreurs, concernant en particulier des répétitions et des omissions dans la liste. Plus précisément, il y a six classes d'isomorphismes d'algèbres de Lie ayant $\mathcal{L}_{5,3}$ comme nilradical, qui se dénotent $\mathfrak{g}_{6,76}, \mathfrak{g}_{6,77}, \dots, \mathfrak{g}_{6,81}$. On remarque que les algèbres $\mathfrak{g}_{6,80}$ et $\mathfrak{g}_{6,76}$ sont isomorphes pour $h = 0$, ainsi que $\mathfrak{g}_{6,81}$ et $\mathfrak{g}_{6,77}$. De plus, en comparant avec le théorème précédent, il s'en suit que l'algèbre $\mathfrak{g}_{6,76}$ est isomorphe à $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,1}$, $\mathfrak{g}_{6,77}$ à $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,3}$ et $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,4}$, $\mathfrak{g}_{6,78}$ à $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,2}$ et $\mathfrak{g}_{6,80}$ à $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,5}$. Les algèbres $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,6}, \dots, \mathfrak{g}_{5,3}^{6,9}$ ont donc été omises dans [40, 15].

5.3 Invariants de Casimir Généralisés

Afin de trouver les invariants de l'algèbre $\mathcal{L}_{5,3}$, il faut résoudre le système suivant :

$$\begin{aligned}\widehat{X}_0(F) &:= x_2 \frac{\partial F}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \\ \widehat{X}_1(F) &:= -x_2 \frac{\partial F}{\partial x_0} + x_4 \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \\ \widehat{X}_2(F) &:= x_3 \frac{\partial F}{\partial x_0} + x_4 \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0.\end{aligned}\tag{5.3}$$

Le rang de la matrice $A(\mathcal{L}_{5,3})$ est 2, il en découle, de la formule de Beltrametti-Blasi, que cette algèbre possède exactement trois invariants indépendants. De plus, comme X_3 et X_4 engendrent le centre, on peut prendre $I_1 = x_3$ et $I_2 = x_4$. Il est facile de vérifier que l'opérateur quadratique

$$I_3 = 2(x_0x_4 - x_1x_3) + x_2^2$$

est une solution du système (5.3). Ainsi, $\{I_1, I_2, I_3\}$ forme un ensemble fondamental d'invariants de $\mathcal{L}_{5,3}$.

Proposition 15 *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie résoluble dont le nilradical est isomorphe à $\mathcal{L}_{5,3}$, les invariants de \mathfrak{g} sont alors fonctions des variables associées au nilradical.*

Démonstration. Nous allons diviser la preuve en deux parties, selon la dimension de \mathfrak{g} .

1. Lorsque la dimension de \mathfrak{g} est égale à six, toute dérivation non nilpotente agit de façon non triviale, sur au moins, un élément du centre de \mathfrak{g} . Tout invariant F vérifie alors :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

2. Si \mathfrak{g} est de dimension deux, le système à résoudre pour l'algèbre $\mathfrak{g}_{5,3}^{7,1}$ est :

$$S_1 = \begin{cases} 2x_3 \frac{\partial F}{\partial y} + x_3 \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \\ x_4 \frac{\partial F}{\partial y} + 2x_4 \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \end{cases},$$

et respectivement pour $\mathfrak{g}_{5,3}^{7,2}$

$$S_2 = \begin{cases} -x_4 \frac{\partial F}{\partial y} + 3x_3 \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \\ x_3 \frac{\partial F}{\partial y} + 3x_4 \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \end{cases}.$$

En faisant des transformations élémentaires, on en déduit que les solutions vérifient :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

On en conclut donc que les invariants de \mathfrak{g} dépendent uniquement des variables associées au nilradical.

TAB. 5.1 – Invariants des algèbres résolubles dont le nilradical est $\mathcal{L}_{5,3}$

\mathfrak{g}	Système fondamental d'invariants
$\mathfrak{g}_{5,3}^{6,1}(\lambda)$	$J_1 = I_1^{1+2\lambda} I_2^{-2-\lambda}, \quad J_2 = I_3^{2+\lambda} I_1^{-2-2\lambda}$
$\mathfrak{g}_{5,3}^{6,2}$	$J_1 = I_3 I_1^{-1} I_2^{-1} + 2 \ln(I_1), \quad J_2 = I_1 I_2$
$\mathfrak{g}_{5,3}^{6,3}$	$J_1 = I_1 I_2^{-2}, \quad J_2 = 2 \ln(I_2) - I_3 I_2^{-2}$
$\mathfrak{g}_{5,3}^{6,4}$	$J_1 = I_2^2 I_1^{-1}, \quad J_2 = I_3 I_2^{-2} + 2 \ln(I_2)$
$\mathfrak{g}_{5,3}^{6,5}$	$J_1 = I_3^3 I_2^{-4}, \quad J_2 = \ln(I_2) - 3 I_1 I_2^{-1}$
$\mathfrak{g}_{5,3}^{6,6}$	$J_1 = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{I_1^2 + I_2^2}{I_1^2}\right) + 3 \arctan(I_2 I_1^{-1}) - \ln(I_1),$ $J_2 = \ln(I_3) + 4 \arctan(I_1 I_2^{-1}).$
$\mathfrak{g}_{5,3}^{6,7}$	$J_1 = I_3, \quad J_2 = I_1^2 + I_2^2$
$\mathfrak{g}_{5,3}^{6,8}$	$J_1 = I_3 + I_1 I_2 - (I_1^2 + I_2^2) \arctan(I_2 I_1^{-1})$ $J_2 = I_1^2 + I_2^2$
$\mathfrak{g}_{5,3}^{6,9}$	$J_1 = I_3 - I_1 I_2 + (I_1^2 + I_2^2) \arctan(I_2 I_1^{-1})$ $J_2 = I_1^2 + I_2^2$
$\mathfrak{g}_{5,3}^{7,1}$	$J_1 = I_3^3 (I_1 I_2)^{-2}$
$\mathfrak{g}_{5,3}^{7,2}$	$J_1 = I_3^3 (I_1^2 + I_2^2)^{-2}$

La liste (5.1) nous donne les invariants des algèbres de Lie résolubles ayant $\mathcal{L}_{5,3}$ comme nilradical, en fonction de $\{I_1, I_2, I_3\}$.

Proposition 16 *L'algèbre $\mathfrak{g}_{5,3}^{8,1}$ possède exactement deux invariants indépendants que l'on peut choisir de la façon suivante :*

$$J_1 = X_2^2 + 2X_0X_4 - 2X_1X_3,$$

$$J_2 = X_2^3 + 3X_2(X_0X_4 - X_1X_3) - 3X_3^2V + 3X_3X_4Y + 3X_4^2Z.$$

L'algèbre $\mathfrak{g}_{5,3}^{9,1}$ possède un seul invariant indépendant qui s'écrit en fonction de J_1 et J_2 , et que l'on peut choisir comme $J = J_1^3 J_2^{-2}$.

Démonstration. Afin de calculer les invariants $\mathfrak{g}_{5,3}^{8,1}$, on doit résoudre le système :

$$\begin{aligned}
\widehat{X}_0 F &= (x_2 \partial_{x_1} + x_3 \partial_{x_2} - x_0 \partial_y - x_1 \partial_v) F = 0, \\
\widehat{X}_1 F &= (-x_2 \partial_{x_0} + x_4 \partial_{x_2} + x_1 \partial_y - x_0 \partial_z) F = 0, \\
\widehat{X}_2 F &= (-x_3 \partial_{x_0} - x_4 \partial_{x_1}) F = 0, \\
\widehat{X}_3 F &= (-x_3 \partial_y - x_4 \partial_v) F = 0, \\
\widehat{X}_4 F &= (x_4 \partial_y - x_3 \partial_z) F = 0, \\
\widehat{Y} F &= (x_0 \partial_{x_0} - x_1 \partial_{x_1} + x_3 \partial_{x_3} - x_4 \partial_{x_4} + 2z \partial_z - 2v \partial_v) F = 0, \\
\widehat{Z} F &= (x_0 \partial_{x_1} + x_3 \partial_{x_4} - 2z \partial_y + y \partial_v) F = 0, \\
\widehat{V} F &= (x_1 \partial_{x_0} + x_4 \partial_{x_3} + 2v \partial_y - y \partial_z) F = 0.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Si on considère les nouvelles variables $x'_0 = x_0 x_4 - x_1 x_3$ et $u = -x_3^2 v + x_3 x_4 y + x_4^2 z$, le système se réduit à :

$$x_2 \partial_{x'_0} F(x'_0, x_2, u) - \partial_{x_2} F(x'_0, x_2, u) - x'_0 \partial_u F(x'_0, x_2, u) = 0. \tag{5.5}$$

Puisque $x_2^2 + x_0'$ et $x_2^3 + 3x_0'x_2 + 3u$ sont deux solutions particulières de (5.5), le système (5.4) possède deux solutions $J_1 = x_2^2 + 2x_0x_4 - 2x_1x_3$ et $J_2 = x_2^3 + 3x_2(x_0x_4 - x_1x_3) - 3x_3^2v + 3x_3x_4y + 3x_4^2z$, fonctionnellement indépendantes, ce qui nous donne l'ensemble fondamental de solutions.

Le système associé à l'algèbre $\mathfrak{g}_{5,3}^{9,1}$ est :

$$\begin{aligned}
\widehat{X}_0 F &= (x_2 \partial_{x_1} + x_3 \partial_{x_2} - x_0 \partial_y - x_1 \partial_v) F = 0, \\
\widehat{X}_1 F &= (-x_2 \partial_{x_0} + x_4 \partial_{x_2} + x_1 \partial_y - x_0 \partial_z - x_1 \partial_{y'}) F = 0, \\
\widehat{X}_2 F &= (-x_3 \partial_{x_0} - x_4 \partial_{x_1} - x_2 \partial_{y'}) F = 0, \\
\widehat{X}_3 F &= (-x_3 \partial_y - x_4 \partial_v - x_3 \partial_{y'}) F = 0, \\
\widehat{X}_4 F &= (x_4 \partial_y - x_3 \partial_z - 2x_4 \partial_{y'}) F = 0, \\
\widehat{Y} F &= (x_0 \partial_{x_0} - x_1 \partial_{x_1} + x_3 \partial_{x_3} - x_4 \partial_{x_4} + 2z \partial_z - 2v \partial_v) F = 0, \\
\widehat{Z} F &= (x_0 \partial_{x_1} + x_3 \partial_{x_4} - 2z \partial_y + y \partial_v - z \partial_{y'}) F = 0, \\
\widehat{V} F &= (x_1 \partial_{x_0} + x_4 \partial_{x_3} + 2v \partial_y - y \partial_z - v \partial_{y'}) F = 0, \\
\widehat{Y'} F &= (x_1 \partial_{x_1} + x_2 \partial_{x_2} + x_3 \partial_{x_3} + 2x_4 \partial_{x_4} - z \partial_z + v \partial_v) F = 0.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Le rang de la matrice $A(\mathfrak{g}_{5,3}^{9,1})$ est 8 donc il existe un seul invariant fondamental. On peut facilement vérifier que $J = J_1^3 J_2^{-2}$ est une solution du système (5.6).

Remarque. Dans le prochain chapitre, on verra que les algèbres de Lie réelles et résolubles, $\mathfrak{g}_{5,3}^{7,1}$ et $\mathfrak{g}_{5,3}^{7,2}$ sont rigides.

On note que ces deux algèbres ne se décomposent pas en somme semi-directe du nilradical et d'un tore extérieur formé d'éléments diagonalisables.

Le théorème de décomposabilité de Carles [17] n'est donc plus valable pour les algèbres de Lie réelles. Ceci nous amène à envisager la classification des algèbres de Lie réelles, résolubles et rigides en petite dimension, qui diffère de celle qui a été faite dans le cas complexe [8].

Chapitre 6

Sur les algèbres de Lie résolubles réelles algébriquement rigides

6.1 Système linéaire de racines d'une algèbre de Lie rigide résoluble complexe

D'après le théorème de structure de Carles [17], toute algèbre de Lie rigide résoluble complexe est algébrique, c'est-à-dire, elle se décompose sous la forme $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}$ où \mathfrak{n} est le nilradical et \mathfrak{t} une sous-algèbre abélienne telle que, pour tout $X \in \mathfrak{t}$, $\text{ad}X$ est semi-simple (\mathfrak{t} est appelé tore extérieur de dérivations). Nous allons brièvement rappeler la définition de système de racines d'une algèbre de Lie rigide résoluble qui a été introduite par [7].

Définition 16 *Un vecteur $X \in \mathfrak{t}$ est dit régulier si la dimension de*

$$V_0(X) = \{Y \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0\}$$

est minimale, c'est-à-dire, $\dim V_0(X) \leq \dim V_0(Z)$ pour tout $Z \in \mathfrak{t}$.

On choisit un vecteur régulier $X \in \mathfrak{t}$ et on note $p = n - \dim V_0(X)$. Comme $\text{ad}X$ est diagonalisable et \mathfrak{n} est invariant par cet opérateur, il existe une base $\{X_1, X_2, \dots, X_{p+q}, \dots, X_n = X\}$ de vecteurs propres de $\text{ad}X$ telle que $\{X_1, X_2, \dots, X_{p+q}\}$ est une base de \mathfrak{n} , $\{X_{p+q+1}, \dots, X_n\}$ est une base de \mathfrak{t} et $\{X_{p+1}, \dots, X_n\}$ est une base de $V_0(X)$.

Définition 17 *Soit X un vecteur régulier de l'algèbre de Lie non nilpotente \mathfrak{g} . Le système linéaire de racines associé à $\{X_1, \dots, X_n\}$ est le système linéaire $S(X)$ à $n - 1$ variables x_i dont les équations sont $x_i + x_j = x_k$ si la composante du vecteur $[X_i, X_j]$ sur X_k est non nulle.*

Théorème 11 [7] *Si l'algèbre de Lie \mathfrak{g} est rigide alors pour tout vecteur régulier $X \in \mathfrak{t}$, on a $\text{rang}(S(X)) = \dim \mathfrak{n} - 1$.*

On en déduit que le rang du système linéaire de racines ne dépend pas du choix de la base $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ et que \mathfrak{t} est un tore maximal.

L'étude du système linéaire de racines permet de construire les algèbres de Lie rigides résolubles complexes jusqu'à dimension 8 [8]. Néanmoins ceci ne peut pas se reproduire dans le cas complexe comme le montre l'exemple ci-dessous.

6.2 Exemple

Dans le chapitre antérieur nous avons étudié les algèbres ayant comme nilradical $\mathcal{L}_{5,3}$. Cette algèbre est isomorphe à l'algèbre nilpotente $\mathcal{N}_{5,3}$ de la classification de Cerezo [20]. Rappelons que dans la base $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$, elle est définie par :

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4, \quad [X_2, X_3] = X_5.$$

Par rapport à cette base, les dérivations extérieures s'écrivent comme

$$\begin{pmatrix} f_1^1 & f_2^1 & 0 & 0 & 0 \\ f_1^2 & f_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_1^1 + f_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & f_2^4 & 0 & 2f_1^1 + f_2^2 & f_2^1 \\ f_1^5 & f_2^5 & 0 & f_1^2 & f_1^1 + 2f_2^2 \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

Le tore de $\mathcal{N}_{5,3}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\text{Der}(\mathcal{N}_{5,3})$ et il est de dimension inférieure ou égale à $\dim \frac{\mathcal{N}_{5,3}}{[\mathcal{N}_{5,3}, \mathcal{N}_{5,3}]} = 2$. Il en découle de la démonstration du théorème (13) qu'elle admet les deux tores suivants, non conjugués par automorphismes :

1. le tore \mathfrak{t}_1 engendré par deux dérivations diagonales

$$\mathfrak{t}_1 = \mathbb{R} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right\} \quad (6.2)$$

2. le tore \mathfrak{t}_2 engendré par

$$\mathfrak{t}_2 = \mathbb{R} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (6.3)$$

On obtient les deux algèbres réelles de dimension 7

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{5,3}^{7,1} &= \mathfrak{t}_1 \otimes \mathcal{N}_{5,3}, \\ \mathfrak{g}_{5,3}^{7,2} &= \mathfrak{t}_2 \otimes \mathcal{N}_{5,3}. \end{aligned}$$

Elles sont algébriquement rigides et non isomorphes dans \mathbb{R} , mais $\mathfrak{g}_{5,3}^{7,1} \otimes \mathbb{C} \simeq \mathfrak{g}_{5,3}^{7,2} \otimes \mathbb{C}$. De plus, l'algèbre complexifiée est à cohomologie nulle et coïncide avec l'algèbre \mathfrak{g}_7^6 de la liste [8].

Cet exemple justifie les définitions suivantes.

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie réelle. Elle est appelée forme réelle d'une algèbre de Lie complexe \mathfrak{g}' si \mathfrak{g}' est isomorphe sur \mathbb{C} à l'algèbre $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Dans ce cas, il existe une base de \mathfrak{g}' par rapport à laquelle les constantes de structure sont réelles. Si $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ est une telle base de \mathfrak{g}' , alors $[Y_i, Y_j] = C_{ij}^k X_k$ avec $C_{ij}^k \in \mathbb{R}$. L'algèbre de Lie réelle définie par les mêmes constantes de structure est une forme réelle de \mathfrak{g}' .

Définition 18 Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie réelle de dimension n . On appelle tore extérieur de dérivations toute sous-algèbre abélienne de $\text{Der}(\mathfrak{g})$ dont les éléments sont semi-simples.

Ceci signifie que les endomorphismes complexes $f \otimes \text{Id} \in \text{End}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ commutent et sont simultanément diagonalisables sur \mathbb{C} . On en déduit que tous les tores extérieurs maximaux de \mathfrak{g} ont la même dimension. Cette dimension est le rang de \mathfrak{g} .

Dans le cas complexe, le théorème de Mal'cev [36] précise que tous les tores maximaux sont conjugués par un automorphisme interne de l'algèbre de Lie. Sur le corps réel ceci n'est plus le cas. Notons que si \mathfrak{g} est réelle de rang non nul le nombre de classes d'automorphismes des tores est fini et c'est un invariant de \mathfrak{g} . On appellera ce nombre l'indice toroïdal de \mathfrak{g} . Notons enfin que si l'algèbre de Lie complexe \mathfrak{g}' admet une forme réelle \mathfrak{g} , alors

$$\dim_{\mathbb{R}} H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \dim_{\mathbb{C}} H^2(\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'). \quad (6.4)$$

En effet, si $\{X_1, \dots, X_n\}$ est une base de \mathfrak{g} , les constantes de structure de \mathfrak{g}' sur la base $\{Y_i := X_i \otimes 1, 1 \leq i \leq n\}$ sont égales à celles de \mathfrak{g} . Il s'en suit que le système linéaire définissant les cocycles (et les cobords) de \mathfrak{g} et \mathfrak{g}' ont le même rang.

Théorème 12 Soit \mathfrak{n} une algèbre de Lie nilpotente de rang non nul k et d'indice toroïdal p . Alors, si $\mathfrak{t}_1, \dots, \mathfrak{t}_p$ sont les tores non conjugués par rapport au groupe $\text{Aut}(\mathfrak{n})$, les algèbres de Lie $\mathfrak{g}_i := \mathfrak{t}_i \oplus \mathfrak{n}$ sont non isomorphes. Si $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} := \mathfrak{g}_i \otimes \mathbb{C}$ est algébriquement rigide, les algèbres réelles \mathfrak{g}_i sont algébriquement rigides et non isomorphes. Ce sont les seules, à isomorphisme près, ayant $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ comme algèbre complexifiée.

Comme les algèbres algébriquement rigides sont à cohomologie nulle, pour les formes réelles \mathfrak{g}_i de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_i \otimes \mathbb{C}$ on a

$$H^2(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i) = H^2(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) = 0, \quad (6.5)$$

par l'équation (6.4), d'où le théorème.

6.3 La classification des algèbres de Lie rigides résolubles réelles jusqu'à dimension 8

L'exemple ci-dessus montre que les classifications réelles et complexes diffèrent. Rappelons que, selon le critère de rigidité de Nijenhuis et Richardson [42], l'annulation du deuxième groupe de cohomologie $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ entraîne la rigidité, \mathfrak{g} étant une algèbre de Lie sur un corps commutatif \mathbb{K} de caractéristique nulle. La réciproque ne se vérifie pas en général et il existe des contre-exemples pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ et $n > 11$. Par contre toute algèbre de Lie rigide sur \mathbb{C} de dimension $n \leq 8$ vérifie $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0$.

Conséquence. Si $\dim \mathfrak{g} \leq 8$, alors \mathfrak{g} est rigide si et seulement si elle est algébriquement rigide.

Dans ce paragraphe nous proposons la classification des algèbres de Lie réelles résolubles rigides de dimension $n \leq 8$ en nous basant d'une part sur la classification complexe [8], et d'autre part sur la classification des algèbres de Lie réelles nilpotentes de dimension $m \leq 6$ [20, 51].

Lemme 2 Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie résoluble réelle algébriquement rigide de dimension 8 dont le tore contient au moins une dérivation non-diagonalisable. Alors le nilradical \mathfrak{n} est de dimension $m \leq 6$.

Démonstration. Supposons que \mathfrak{g} soit de rang 1, c'est-à-dire, $\dim \mathfrak{n} = 7$. Alors l'espace complémentaire de \mathfrak{n} dans \mathfrak{g} est de dimension 1, donc engendré par un vecteur X tel que l'opérateur adjoint $\text{ad}(X)$ est

diagonalisable sur \mathbb{C} . D'après [7], pour toute algèbre de Lie résoluble complexe rigide, il existe une base du tore extérieur \mathfrak{t} telle que les valeurs propres des opérateurs adjoints sont entières. On en déduit l'existence d'un vecteur Y , tel que $X = \lambda Y$ où $\lambda \in \mathbb{C}$ et la forme canonique est $\text{diag}(n_1, \dots, n_7, 0)$, où $n_1, \dots, n_7 \in \mathbb{Z}$. De plus, les valeurs propres sont non nulles d'après [8]. Comme l'opérateur $\text{ad}(X)$ n'est diagonalisable que sur le corps des complexes, on peut supposer que λ est imaginaire pur. Alors $\text{ad}(X) = \text{diag}(\lambda n_1, \dots, \lambda n_7, 0)$ sur \mathbb{C} . Des propriétés des polynômes à coefficients réels d'ordre impair on déduit que λn_i et $\bar{\lambda} n_i$ sont des valeurs propres de $\text{ad}(X)$, d'où $\text{ad}(X) = \text{diag}(\lambda n_1, \bar{\lambda} n_1, \lambda n_2, \bar{\lambda} n_2, \lambda n_3, \bar{\lambda} n_3, \lambda n_4, \bar{\lambda} n_4)$. Ceci implique qu'il existe au moins un $\lambda n_i = 0$, d'où la contradiction.

D'après le lemme le problème est alors réduit à déterminer les formes réelles des algèbres de Lie rigides complexes.

Proposition 17 *Toute algèbre de Lie rigide réelle de dimension $n \leq 8$ possédant au moins une dérivation non diagonale est isomorphe à l'une des algèbres suivantes :*

– *Dimension 4 :*

$$\mathfrak{g}_4^2 : [X_1, X_3] = X_2, \quad [X_3, X_2] = X_1, \quad [X_4, X_1] = X_1, \quad [X_4, X_2] = X_2.$$

– *Dimension 5 :*

$$\mathfrak{g}_5^2 : \begin{aligned} [X_1, X_2] &= X_3, & [X_4, X_1] &= X_1, & [X_4, X_2] &= X_2, & [X_4, X_3] &= 2X_3, \\ [X_5, X_1] &= -X_2, & [X_5, X_2] &= X_1. \end{aligned}$$

– *Dimension 6 :*

$$\mathfrak{g}_6^4 : \begin{aligned} [X_1, X_3] &= X_2, & [X_3, X_2] &= X_1, & [X_4, X_1] &= X_1, & [X_4, X_2] &= X_2, \\ [X_5, X_6] &= X_5. \end{aligned}$$

– *Dimension 7 :*

$$\mathfrak{g}_7^9 : \begin{aligned} [X_1, X_2] &= X_3, & [X_1, X_3] &= X_4, & [X_2, X_3] &= X_4, & [X_6, X_1] &= -X_2, \\ [X_6, X_2] &= X_1, & [X_6, X_4] &= -X_5, & [X_6, X_5] &= X_4, & [X_7, X_1] &= X_1, \\ [X_7, X_2] &= X_2, & [X_7, X_3] &= 2X_3, & [X_7, X_4] &= 3X_4, & [X_7, X_5] &= 3X_5. \end{aligned}$$

$$\mathfrak{g}_7^{10} : \begin{aligned} [X_5, X_1] &= X_1, & [X_5, X_2] &= X_2, & [X_5, X_3] &= 2X_3, & [X_6, X_1] &= -X_2, \\ [X_6, X_2] &= X_1, & [X_7, X_4] &= X_4. \end{aligned}$$

– *Dimension 8 :*

$$\mathfrak{g}_8^{34} : \begin{aligned} [X_1, X_3] &= X_2, & [X_3, X_2] &= X_1, & [X_4, X_1] &= X_1, & [X_4, X_2] &= X_2, \\ [X_5, X_7] &= X_6, & [X_7, X_6] &= X_5, & [X_8, X_5] &= X_5, & [X_8, X_6] &= X_6. \end{aligned}$$

$$\mathfrak{g}_8^{35} : \begin{aligned} [X_1, X_3] &= X_2, & [X_3, X_2] &= X_1, & [X_4, X_1] &= X_1, & [X_4, X_2] &= X_2, \\ [X_5, X_6] &= X_6, & [X_7, X_8] &= X_8. \end{aligned}$$

$$\mathfrak{g}_8^{36} : \begin{aligned} [X_1, X_2] &= X_4, & [X_1, X_3] &= X_5, & [X_6, X_i] &= X_i & (i = 1, 4, 5), \\ [X_7, X_2] &= -X_3, & [X_7, X_3] &= X_2, & [X_7, X_4] &= -X_5, & [X_7, X_5] &= X_4, \\ [X_8, X_i] &= X_i & (i = 2, 3, 4, 5). \end{aligned}$$

$$\mathfrak{g}_8^{37} : \begin{aligned} [X_1, X_2] &= X_5, & [X_3, X_4] &= X_5, & [X_6, X_i] &= X_i & (i = 1, \dots, 4), \\ [X_6, X_5] &= 2X_5, & [X_7, X_1] &= -X_2, & [X_7, X_2] &= X_1, & [X_8, X_3] &= -X_4, \\ [X_8, X_4] &= X_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_8^{38} : \quad & [X_1, X_2] = X_5, \quad [X_3, X_4] = X_5, \quad [X_6, X_i] = X_i \quad (i = 1, \dots, 4), \\
& [X_6, X_5] = 2X_5, \quad [X_7, X_1] = X_1, \quad [X_7, X_2] = -X_2, \quad [X_8, X_3] = -X_4, \\
& [X_8, X_4] = X_3. \\
\mathfrak{g}_8^{39} : \quad & [X_1, X_i] = X_{i+1}, \quad (2 \leq i \leq 4), \quad [X_3, X_2] = X_6, \quad [X_6, X_2] = X_5, \\
& [X_7, X_1] = X_1, \quad [X_7, X_2] = X_2, \quad [X_7, X_3] = 2X_3, \quad [X_7, X_4] = 3X_4, \\
& [X_7, X_5] = 4X_5, \quad [X_7, X_6] = 3X_6, \quad [X_8, X_1] = X_2, \quad [X_8, X_2] = -X_1, \\
& [X_8, X_4] = -X_6, \quad [X_8, X_6] = X_4. \\
\mathfrak{g}_8^{40} : \quad & [X_1, X_i] = X_{i+2}, \quad (2 \leq i \leq 4), \quad [X_2, X_3] = X_6, \quad [X_4, X_2] = X_5, \\
& [X_7, X_1] = X_1, \quad [X_7, X_2] = X_2, \quad [X_7, X_3] = 2X_3, \quad [X_7, X_4] = 2X_4, \\
& [X_7, X_5] = 3X_5, \quad [X_7, X_6] = 3X_6, \quad [X_8, X_1] = X_2, \quad [X_8, X_2] = -X_1, \\
& [X_8, X_5] = X_6, \quad [X_8, X_6] = -X_5.
\end{aligned}$$

De plus, les algèbres sont deux-à-deux non isomorphes.

Théorème 13 Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie réelle, résoluble et algébriquement rigide de dimension inférieure ou égale à 8. Alors \mathfrak{g} est isomorphe à l'une des algèbres \mathfrak{g}_i^j décrites par les lois μ_i^j de la liste [8] (celles-ci sont les formes réelles obtenues par restriction des scalaires des algèbres complexes résolubles rigides de dimension inférieure ou égale à 8) ou bien à l'une des algèbres du lemme précédent. De plus, toutes ces algèbres sont deux-à-deux non isomorphes.

Démonstration. Soit \mathfrak{g} une algèbre vérifiant les hypothèses du théorème.

Si la dimension du nilradical est inférieure ou égale à 6, les algèbres possédant des dérivations non diagonalisables sont données par le lemme précédent, et celles ayant un tore formé par des dérivations diagonalisables sont classifiées dans [8]. Si la dimension du nilradical est égale à 7, alors nécessairement $\dim \mathfrak{g} = 8$ et le tore est engendré par une seule dérivation f . D'après le lemme ci-dessus, f est diagonale et donc \mathfrak{g} est obtenue par restriction des scalaires des algèbres complexes de la liste [8] qui ont un nilradical de dimension 7.

De la théorie générale de la rigidité sur le corps complexe on déduit que toute algèbre de Lie résoluble rigide est déterminée de façon biunivoque par son nilradical, et par conséquent par le système de racines [7]. Par contre, dans le cas réel le nilradical ne détermine pas la structure du tore. La table 6.1 donne les algèbres de Lie réelles rigides non isomorphes de dimension $n \leq 8$ qui s'appuient sur un nilradical donné. On appellera forme normale l'algèbre de Lie réelle obtenue par restriction des scalaires de l'algèbre complexe de la classification dans [8].

La raison de l'existence des algèbres rigides réelles s'appuyant sur le même nilradical est une conséquence de l'invalidité du théorème de décomposabilité, et plus précisément, de l'existence de dérivations extérieures non diagonalisables. Par conséquent, le nombre des algèbres de Lie réelles rigides ayant le même nilradical est donné précisément par l'indice toroïdal.

Corollaire 4 Toute algèbre de Lie nilpotente réelle de dimension $n \leq 6$ est le nilradical d'une algèbre de Lie algébriquement rigide.

TAB. 6.1 – Algèbres de Lie réelles rigides ayant le même nilradical.

Dimension	Nilradical	Formes réelles
4	abélien	\mathfrak{g}_4^1 (forme normale) \mathfrak{g}_4^2
5	$\mathcal{N}_3 = \mathfrak{h}_1$	\mathfrak{g}_5^1 (forme normale) \mathfrak{g}_5^2
6	abélien	\mathfrak{g}_6^3 (forme normale) \mathfrak{g}_6^4
7	$\mathcal{N}_3 \oplus \mathbb{R}$	\mathfrak{g}_7^8 (forme normale) \mathfrak{g}_7^{10}
	$\mathcal{N}_{5,3}$	\mathfrak{g}_7^6 (forme normale) \mathfrak{g}_7^9
8	abélien	$\mathfrak{g}_8^{33} \simeq \mathfrak{g}_2^1 \oplus \mathfrak{g}_2^1 \oplus \mathfrak{g}_2^1 \oplus \mathfrak{g}_2^1$ (forme normale) \mathfrak{g}_8^{34} \mathfrak{g}_8^{35}
	$\mathcal{N}_{5,5}$	\mathfrak{g}_8^{31} (forme normale) \mathfrak{g}_8^{36}
	$\mathcal{N}_{5,6} = \mathfrak{h}_2$	\mathfrak{g}_8^{32} (forme normale) \mathfrak{g}_8^{37} \mathfrak{g}_8^{38}
	$\mathcal{N}_{6,6}$	\mathfrak{g}_8^{22} (forme normale) \mathfrak{g}_8^{39}
	$\mathcal{N}_{6,14}$	\mathfrak{g}_8^{29} (forme normale) \mathfrak{g}_8^{40}

Exemple 1 L'algèbre de Heisenberg \mathfrak{h}_n est définie par les crochets

$$[X_{2i-1}, X_{2i}] = X_{2n+1} \quad i = 1, \dots, n$$

Sur le corps complexe, il n'existe qu'une algèbre \mathfrak{g}_{3n+2} rigide ayant \mathfrak{h}_n pour nilradical, donnée par le tore de dimension $n + 1$ engendré par $\{Y_1, \dots, Y_{n+1}\}$:

$$\begin{aligned} [Y_i, X_{2i-1}] &= X_{2i-1}, & [Y_i, X_{2i}] &= -X_{2i}, & 1 \leq i \leq n; \\ [Y_{n+1}, X_i] &= X_i, & [Y_{n+1}, X_{2n+1}] &= 2X_{2n+1}, & 1 \leq i \leq 2n. \end{aligned}$$

Les formes réelles de \mathfrak{g}_{3n+2} , que nous dénotons par $\mathfrak{g}_{3n+2,k}$ (où $0 \leq k \leq n$) sont données par :

$$\begin{aligned} [X_{2i-1}, X_{2i}] &= X_{2n+1}, & 1 \leq i \leq n; \\ [Y_i, X_{2i-1}] &= X_{2i}, & [Y_i, X_{2i}] &= -X_{2i-1}, & 1 \leq i \leq k; \\ [Y_i, X_{2i-1}] &= X_{2i-1}, & [Y_i, X_{2i}] &= -X_{2i}, & k+1 \leq i \leq n+1; \\ [Y_{n+1}, X_i] &= X_i, & [Y_{n+1}, X_{2n+1}] &= 2X_{2n+1} & 1 \leq i \leq 2n. \end{aligned}$$

En particulier, la forme réelle $\mathfrak{g}_{3n+2,k}$ possède k dérivations non diagonalisables. Cela montre que l'indice toroïdal est égal à $p + 1$. Cette étude nous conduit à émettre la conjecture suivante :

Conjecture. Toute algèbre de Lie réelle résoluble rigide possède au moins une dérivation diagonale.

6.4 Invariants de Casimir Généralisés

Comme dans les chapitres précédents, nous avons calculé les invariants des algèbres obtenues. Les invariants des algèbres de Lie rigides résolubles complexes se trouve dans [14]. Nous avons vérifié et corrigé cette liste afin d'obtenir les invariants des formes normales. De plus, pour compléter le cas réel, nous avons calculé les invariants des formes réelles qui ne sont pas normales. Les résultats sont présentés dans les tableaux suivants.

TAB. 6.2 – Invariants des algèbres de Lie rigides résolubles réelles de dimension $n \leq 6$.

Algèbre	dimension	crochets	Invariants
\mathfrak{r}_2^1	2	$[V_1, Y_1] = Y_1$	aucun
$\mathfrak{r}_4^1 = \mathfrak{r}_2^1 \oplus \mathfrak{r}_2^1$	4	$[V_1, Y_i] = Y_i, \quad i = 1, 2$	aucun
\mathfrak{r}_4^2	4	$[V_1, Y_1] = -Y_2,$ $[V_1, Y_2] = Y_1,$ $[V_2, Y_i] = Y_i \quad i = 1, 2.$	aucun
\mathfrak{r}_5^1	5	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 2, 3$ $[V_2, Y_i] = Y_i, \quad i = 2, 3$ $[Y_1, Y_2] = Y_3,$	$I_1 = \frac{y_1 y_2}{y_3} + v_1 - 3v_2$
\mathfrak{r}_5^2	5	$[V_1, Y_i] = Y_i, \quad i = 1, 2$ $[V_1, Y_3] = 2Y_3,$ $[V_2, Y_1] = -Y_2,$ $[V_2, Y_2] = Y_1,$ $[Y_1, Y_2] = Y_3.$	$I_1 = \frac{y_1^2 + y_2^2}{y_3} - 2v_2$
\mathfrak{r}_6^1	6	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$ $[Y_1, Y_i] = Y_{i+1}, \quad i = 2, 3, 4$ $[Y_2, Y_3] = Y_5$	aucun
\mathfrak{r}_6^2	6	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 2, 3, 4$ $[V_2, Y_i] = Y_i, \quad i = 2, 3, 4$ $[Y_1, Y_i] = Y_{i+1}, \quad i = 2, 3$	aucun
\mathfrak{r}_6^3	6	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 2, 3$ $[V_2, Y_2] = Y_2,$ $[V_3, Y_3] = Y_3$	aucun
$\mathfrak{r}_6^4 = \mathfrak{r}_4^2 \oplus \mathfrak{r}_2^1$	6	$[Y_5, Y_1] = -Y_2,$ $[Y_5, Y_2] = Y_1,$ $[Y_3, Y_4] = Y_4,$ $[Y_6, Y_1] = Y_1,$ $[Y_6, Y_2] = Y_2$	aucun

TAB. 6.3 – Invariants des algèbres de Lie rigides résolubles réelles de dimension 7.

Algèbre	crochets	Invariants
\mathfrak{r}_7^1	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ $[Y_1, Y_i] = Y_{i+1}, \quad i = 2, 3, 4, 5$ $[Y_2, Y_i] = Y_{i+2}, \quad i = 3, 4.$	$I_1 = \frac{(3y_6^2 y_3 + y_5^3 - 3y_4 y_5 y_6)^2}{y_6^5}$
\mathfrak{r}_7^2	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 7$ $[Y_1, Y_i] = Y_{i+1}, \quad i = 2, 3, 4$ $[Y_2, Y_i] = Y_{i+2}, \quad i = 3, 5$ $[Y_3, Y_4] = -Y_7$	$I_1 = \frac{(6y_3 y_5 y_7 - 2y_5^3 - 3y_7 y_4^2 + 6y_7^2 y_1)^7}{y_7^{15}}$
\mathfrak{r}_7^3	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 3, 4, 5, 6, 7$ $[Y_1, Y_i] = Y_{i+1}, \quad i = 3, 4, 5, 6,$ $[Y_3, Y_4] = Y_7$	$I_1 = \frac{(2y_5 y_7 - y_6^2)^7}{y_7^{12}}$
\mathfrak{r}_7^4	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$ $[V_1, Y_3'] = 3Y_3',$ $[Y_1, Y_i] = Y_{i+1}, \quad i = 2, 3, 4,$ $[Y_2, Y_3] = [Y_2, Y_3'] = Y_5.$	$I_1 = \frac{(y_4^2 - 2y_3 y_5)^5}{y_5^8}$
\mathfrak{r}_7^5	$[V_1, Y_i] = Y_i, i = 1, 3,$ $[V_1, Y_i] = (i - 2)Y_i, i = 4, 5$ $[V_2, Y_i] = Y_i, \quad i = 2, 3, 4, 5,$ $[Y_1, Y_i] = Y_{i+1}, \quad i = 2, 3, 4.$	$I_1 = \frac{(y_3^2 - 2y_2 y_4)(y_4^2 - 2y_3 y_5)^2}{y_5^6}$
\mathfrak{r}_7^6	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5,$ $[V_2, Y_i] = Y_i, \quad i = 2, 3, 4,$ $[V_2, Y_5] = 2Y_5,$ $[Y_1, Y_i] = Y_{i+1}, \quad i = 2, 3,$ $[Y_2, Y_3] = Y_5.$	$I_1 = \frac{(2y_1 y_5 + y_3^2 - 2y_2 y_4)^3}{y_4^2 y_5^2}$
\mathfrak{r}_7^7	$[V_1, Y_i] = Y_i, i = 1, 4,$ $[V_1, Y_i] = 2Y_i, i = 2, 5$ $[V_2, Y_i] = Y_i, \quad i = 3, 4, 5,$ $[Y_1, Y_i] = Y_{i+1}, \quad i = 3, 4,$ $[Y_2, Y_3] = Y_5$	$I_1 = \frac{-2y_5^2 v_2 + v_1 y_5^2 + 2y_2 y_3 y_5 + y_1 y_4 y_5 - y_2 y_4^2}{y_5^2}$
\mathfrak{r}_7^8	$[V_1, Y_i] = iY_i, i = 1, 2, 3, 4$ $[V_2, Y_i] = Y_i, \quad i = 2, 3,$ $[V_2', Y_4] = Y_4,$ $[Y_1, Y_2] = Y_3.$	$I_1 = \frac{y_1 y_2 + v_1 y_3 - 3v_2 y_3 - 4v_2' y_3}{y_3}$
\mathfrak{r}_7^9	$[V_1, Y_i] = -Y_{i+1}, i = 1, 4$ $[V_1, Y_i] = Y_{i-1}, i = 2, 5$ $[V_2, Y_i] = Y_i, i = 1, 2$ $[V_2, Y_3] = 2Y_3,$ $[V_2, Y_i] = 3Y_i, i = 3, 4$ $[Y_1, Y_2] = Y_3$ $[Y_1, Y_3] = Y_4$ $[Y_2, Y_3] = Y_5.$	$I_1 = \frac{(y_3^2 + 2y_1 y_5 - 2y_2 y_4)^3}{(y_4^2 + y_5^2)^2}$
$\mathfrak{r}_7^{10} = \mathfrak{r}_5^2 \oplus \mathfrak{r}_2^1$	$[V_1, Y_i] = Y_i, i = 1, 2$ $[V_1, Y_3] = 2Y_3,$ $[V_2, Y_1] = -Y_2,$ $[V_2, Y_2] = Y_1,$ $[V_3, Y_4] = Y_4,$ $[Y_1, Y_2] = Y_3.$	$I_1 = \frac{y_1^2 + y_2^2 - 2y_3 v_2}{y_3}$

TAB. 6.4 – Invariants des algèbres de Lie rigides résolubles réelles de dimension 8 et rang 1.

Algèbre	crochets	Invariants
\mathfrak{t}_8^1	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8,$ $[Y_1, Y_i] = Y_{i+1}, \quad i = 2, 6, 7$ $[Y_2, Y_3] = Y_5, \quad [Y_2, Y_5] = Y_7,$ $[Y_2, Y_6] = Y_8, \quad [Y_3, Y_5] = Y_8.$	aucun
\mathfrak{t}_8^2	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ $[Y_1, Y_i] = Y_{i+1}, \quad i = 3, 4, 5, 6, 7$ $[Y_3, Y_i] = Y_{i+3}, \quad i = 4, 5.$	$I_1 = \frac{y_8^7}{(y_2^2 - 2y_6y_8)^4}$ $I_2 = \frac{(y_6^2 - 2y_5y_7 + 2y_4y_8)^2}{y_8^3}$
\mathfrak{t}_8^3	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9$ $[Y_1, Y_i] = Y_{i+1}, \quad i = 3, 4, 5, 6$ $[Y_3, Y_i] = Y_{i+3}, \quad i = 4, 6,$ $[Y_4, Y_5] = -Y_9.$	$I_1 = \frac{y_9^7}{y_7^9}$ $I_2 = \frac{(2y_9^2y_1 - y_6^2y_7 + 2y_4y_6y_9 - y_5^2y_9 + 2y_7^2y_5 - 2y_3y_7y_9)^7}{y_7y_9^{14}}$
\mathfrak{t}_8^4	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ $[Y_1, Y_i] = Y_{i+1}, \quad i = 4, 5, 6, 7, 8$ $[Y_4, Y_5] = Y_9.$	$I_1 = \frac{(y_8^2 - 2y_7y_9)^9}{y_9^{16}}$ $I_2 = \frac{y_9^8}{(3y_6y_9^2 + y_8^3 - 3y_7y_8y_9)^3}$
\mathfrak{t}_8^5	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ $[Y_2, Y_i] = Y_{i+2}, \quad i = 3, 4, 5, 6$ $[Y_3, Y_i] = Y_{i+3}, \quad i = 4, 5.$	$I_1 = \frac{y_7^8}{y_8^7}$ $I_2 = \frac{(2y_8^2y_4 - y_6^2y_8 + 2y_6y_7^2 - 2y_5y_7y_8)^7}{y_7^4y_8^{14}}$
\mathfrak{t}_8^6	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10$ $[Y_2, Y_i] = Y_{2+i}, \quad i = 4, 6, 8,$ $[Y_3, Y_i] = Y_{i+3}, \quad i = 4, 7,$ $[Y_4, Y_6] = Y_{10}.$	aucun
\mathfrak{t}_8^7	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9$ $[Y_2, Y_i] = Y_{i+2}, \quad i = 3, 5, 6, 7,$ $[Y_3, Y_i] = Y_{i+3}, \quad i = 5, 6.$	$I_1 = \frac{y_9^8}{y_8^9}$ $I_2 = \frac{(2y_5y_9^2 - y_7^2y_9 + 2y_7y_8^2 - 2y_6y_8y_9)^8}{y_8^5y_9^{16}}$
\mathfrak{t}_8^8	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 2, 3, 5, 7, 8, 9, 11$ $[Y_2, Y_i] = Y_{i+2}, \quad i = 3, 5, 7, 9$ $[Y_3, Y_i] = Y_{i+3}, \quad i = 5, 8.$	$I_1 = \frac{y_{11}^{18}}{(y_9^2 - 2y_7y_{11})^{11}}$ $I_2 = \frac{(y_9^2 - 2y_7y_{11})^3}{(3y_5y_{11}^2 + y_9^3 - 3y_7y_9y_{11} - \frac{3}{2}y_8^2y_{11})^2}$
\mathfrak{t}_8^9	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ $[V_1, Y_3'] = 3Y_3'$ $[Y_1, Y_i] = Y_{i+1}, \quad i = 2, 3, 4, 5,$ $[Y_2, Y_i] = Y_{i+2}, \quad i = 3, 4,$ $[Y_2, Y_3'] = Y_5, \quad [Y_3, Y_3'] = Y_6$	aucun
\mathfrak{t}_8^{10}	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$ $[V_1, Y_4'] = 4Y_4'$ $[Y_1, Y_i] = Y_{i+1}, \quad i = 2, 3, 4, 5$ $[Y_2, Y_i] = Y_{i+2}, \quad i = 3, 4,$ $[Y_2, Y_4'] = Y_6$	$I_1 = \frac{(2y_6y_4' + y_5^2 - 2y_4y_6)^3}{y_6^5}$ $I_2 = \frac{(3y_6^2y_3 + y_5^3 - 3y_4y_5y_6)^2}{y_6^5}$

TAB. 6.4 – suite

Algèbre	crochets	Invariants
\mathfrak{t}_8^{11}	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$ $[V_1, Y'_5] = 5Y'_5, \quad [Y_1, Y'_5] = Y_6$ $[Y_1, Y_i] = Y_{i+1}, \quad i = 2, 3, 4, 5,$ $[Y_2, Y_3] = Y'_5, \quad [Y_2, Y_4] = Y_6$	$I_1 = \frac{(y'_5 - y_5)^6}{y_6^5}$ $I_2 = \frac{(6y_6^2 y_3 + 2y_5^3 + 3y_5^2(y'_5 - y_5) - 6y_4 y_5 y_6 - 6y_4(y'_5 - y_5)y_6)^2}{y_6^5}$
\mathfrak{t}_8^{12}	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 7,$ $[V_1, Y'_3] = 3Y'_3, [Y_1, Y_2] = Y'_3$ $[Y_1, Y'_3] = Y_4, [Y_1, Y_4] = Y_5$ $[Y_2, Y_3] = Y_5, [Y'_2, Y'_3] = Y_5$ $[Y_2, Y_5] = [Y'_3, Y_4] = Y_7.$	$I_1 = \frac{(2y_3 y_7 - y_5^2)^7}{y_7^{10}}$ $I_2 = \frac{(6y_1 y_7^2 + 6y'_3 y_5 y_7 - 3y_4^2 y_7 - 2y_5^3)^7}{y_7^{15}}$
\mathfrak{t}_8^{13}	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 7,$ $[V_1, Y'_5] = 5Y'_5,$ $[Y_1, Y_i] = Y_{i+1}, \quad i = 2, 3, 4,$ $[Y_2, Y_3] = Y'_5, \quad [Y_3, Y_4] = -Y_7$ $[Y_2, Y_5] = [Y'_2, Y'_5] = Y_7,$	$I_1 = \frac{(y_5 - y'_5)^7}{y_7^5}$ $I_2 = \frac{(6y_7^2 y_1 - 2y_5^3 + 3y_5^2(y_5 - y'_5) + 6y_3 y_5 y_7 - 3y_7 y_4^2)^7}{y_7^{15}}$
\mathfrak{t}_8^{14}	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 3, 4, 5, 6, 7,$ $[V_1, Y'_4] = 4Y'_4,$ $[Y_1, Y_i] = Y_{i+1}, \quad i = 3, 4, 5, 6$ $[Y_3, Y_4] = [Y_3, Y'_4] = Y_7.$	$I_1 = \frac{(2y_5 y_7 - y_6^2)^7}{y_7^{12}}$ $I_2 = \frac{(3y_7^2(y'_4 - y_4) - y_6^3 + 3y_5 y_6 y_7)^7}{y_7^{18}}$
\mathfrak{t}_8^{15}	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5,$ $[V_1, Y'_3] = 3Y'_3, \quad [V_1, Y'_4] = 4Y'_4,$ $[Y_1, Y_i] = Y_{i+1}, \quad i = 2, 3, 4,$ $[Y_1, Y'_3] = Y'_4, [Y_1, Y'_4] = [Y_2, Y_3] = Y_5$	$I_1 = \frac{(2y'_3 y_5 + y_4^2 - 2y_4 y'_4)^5}{y_5^8}$ $I_2 = \frac{(y_4 - y'_4)^5}{y_5^4}$
\mathfrak{t}_8^{16}	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5,$ $[V_1, Y'_1] = Y'_1, \quad [V_1, Y'_3] = 3Y'_3,$ $[Y_1, Y_i] = Y_{i+1}, \quad i = 2, 4,$ $[Y_1, Y'_i] = Y_{i+1}, \quad i = 1, 3,$ $[Y'_1, Y_i] = Y_{i+1}, \quad i = 3, 4,$ $[Y'_1, Y_2] = Y'_3,$ $[Y_2, Y_3] = -[Y_2, Y'_3] = Y_5$	$I_1 = \frac{(2y'_3 y_5 - y_4^2 + 2y_3 y_5)^5}{y_5^8}$ $I_2 = \frac{(y'_1 y_5 - y_2 y_4 + y'_3 y_3 - y_1 y_5)^5}{y_5^6}$
\mathfrak{t}_8^{17}	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5,$ $[V_1, Y'_i] = iY'_i, \quad i = 3, 5,$ $[Y_1, Y_i] = Y_{i+1}, \quad i = 2, 3, 4,$ $[Y_1, Y'_3] = Y_4, \quad [Y_2, Y_3] = Y'_5,$ $[Y_2, Y'_3] = Y_5 + 2Y'_5$	$I_1 = \frac{y'_5}{y_5}$ $I_2 = \frac{(2y_3 y_5^2 - 2y'_3 y'_5 y_5 - y_4^2(y'_5 + y_5) + 4y_3 y_5 y'_5)^5}{y_5^8 (y'_5)^5}$
\mathfrak{t}_8^{18}	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 2, 3$ $[V_1, Y'_i] = iY'_i, \quad i = 1, 2, 3$ $[V_1, Y''_1] = Y''_1, \quad [Y_1, Y'_1] = Y_2,$ $[Y_1, Y''_1] = Y'_2, \quad [Y''_1, Y'_2] = Y'_3,$ $[Y_1, Y'_2] = Y'_3, \quad [Y'_1, Y_2] = Y'_3,$ $[Y'_1, Y'_2] = [Y''_1, Y_2] = Y_3$	$I_1 = \frac{y'_3}{y_3}$ $I_2 = \frac{(-2y''_1(y'_3)^2 + y'_3(y_2^2 + (y'_2)^2) - 2y_1(y_3^2 - (y'_3)^2) + 2y_3(y'_1 y'_3 - y'_2 y_2))^3}{y_3 (y'_3)^6}$

TAB. 6.5 – Invariants des algèbres de Lie rigides résolubles réelles de dimension 8 et rang 2.

Algèbre	crochets	Invariants
\mathfrak{r}_8^{19}	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$ $[V_2, Y_i] = Y_i, \quad i = 2, 3, 4, 5, 6,$ $[Y_1, Y_i] = Y_{i+1}, \quad i = 2, 3, 4, 5.$	$I_1 = \frac{(y_5^2 - 2y_4y_6)^3}{(3y_6^2y_3 + y_3^3 - 3y_4y_5y_6)^2}$ $I_2 = \frac{(-4y_2y_6^3 + 4y_5y_3y_6^2 + y_5^4 - 4y_4y_5^2y_6 + 2y_4^2y_6^2)}{(2y_4y_6 - y_5^2)^2}$
\mathfrak{r}_8^{20}	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$ $[V_2, Y_i] = Y_i, \quad i = 3, 4, 5, 6,$ $[Y_1, Y_i] = Y_{i+1}, \quad i = 3, 4, 5,$ $[Y_2, Y_i] = Y_{i+2}, \quad i = 3, 4$	aucun
\mathfrak{r}_8^{21}	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$ $[V_2, Y_i] = Y_i, \quad i = 4, 5, 6,$ $[Y_1, Y_i] = Y_{i+1}, \quad i = 2, 4, 5, \quad [Y_2, Y_4] = Y_6$	aucun
\mathfrak{r}_8^{22}	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$ $[V_2, Y_i] = Y_i, \quad i = 2, 3, 4,$ $[V_2, Y_i] = 2Y_i, \quad i = 5, 6,$ $[Y_1, Y_i] = Y_{i+1}, \quad i = 2, 3, 5,$ $[Y_2, Y_i] = Y_{i+2}, \quad i = 3, 4$	$I_1 = \frac{2y_1y_5 - 2y_2y_4 + y_3^2 + 2y_6(v_1 - 3v_2)}{y_6}$ $I_2 = \frac{y_3y_6 - y_4y_5}{y_6^3}$
\mathfrak{r}_8^{23}	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$ $[V_2, Y_6] = Y_6, \quad [Y_2, Y_3] = Y_5$ $[Y_1, Y_i] = Y_{i+1}, \quad i = 2, 3, 4,$	aucun
\mathfrak{r}_8^{24}	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 7,$ $[V_2, Y_i] = Y_i, \quad i = 3, 4, 5, \quad [V_2, Y_7] = 2Y_7$ $[Y_1, Y_i] = Y_{i+1}, \quad i = 3, 4,$ $[Y_2, Y_3] = Y_5, \quad [Y_3, Y_4] = Y_7$	aucun
\mathfrak{r}_8^{25}	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 7,$ $[V_2, Y_i] = Y_i, \quad i = 2, 3, 4, \quad [V_2, Y_5] = 2Y_5,$ $[V_2, Y_7] = 3Y_7, \quad [Y_1, Y_i] = Y_{i+1}, \quad i = 2, 3,$ $[Y_2, Y_i] = Y_{i+2}, \quad i = 3, 5$	aucun
\mathfrak{r}_8^{26}	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 7,$ $[V_2, Y_i] = Y_i, \quad i = 2, 3, 4, 5, \quad [V_2, Y_7] = 2Y_7,$ $[Y_1, Y_i] = Y_{i+1}, \quad i = 2, 3, 4,$ $[Y_2, Y_5] = -[Y_3, Y_4] = Y_7$	aucun
\mathfrak{r}_8^{27}	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 2, 3, 5, 6,$ $[V_2, Y_i] = Y_i, \quad i = 2, 3, \quad [V_2, Y_5] = 2Y_5, [V_2, Y_6] = 3Y_6$ $[V_2, Y_7] = 3Y_7, [Y_1, Y_i] = Y_{i+1}, \quad i = 2, 6,$ $[Y_2, Y_i] = Y_{i+2}, \quad i = 3, 5$	aucun
\mathfrak{r}_8^{28}	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 7,$ $[V_2, Y_2] = Y_2, [V_2, Y_i] = 2Y_i, \quad i = 3, 4,$ $[V_2, Y_5] = 3Y_5, [V_2, Y_7] = 4Y_7, [Y_1, Y_3] = y_4$ $[Y_3, Y_4] = -Y_7, [Y_2, Y_3] = Y_5, [Y_2, Y_5] = Y_7$ $[Y_2, Y_i] = Y_{i+2}, \quad i = 3, 5,$	aucun
\mathfrak{r}_8^{29}	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5,$ $[V_1, Y_3'] = 3Y_3', [V_2, Y_3'] = Y_3', [V_2, Y_5] = 2Y_5$ $[V_2, Y_i] = Y_i, \quad i = 2, 3, 4, \quad [Y_1, Y_2] = Y_3$ $[Y_1, Y_3] = Y_4, [Y_1, Y_3'] = Y_4, [Y_2, Y_3] = Y_5$	aucun

TAB. 6.5 – suite

Algèbre	crochets	Invariants
\mathfrak{r}_8^{39}	$[V_1, Y_i] = Y_i, \quad i = 1, 2$ $[V_1, Y_i] = (i-1)Y_i, \quad i = 3, 4, 5$ $[V_1, Y_6] = 3Y_6,$ $[V_2, Y_1] = Y_2,$ $[V_2, Y_2] = -Y_1,$ $[V_2, Y_4] = -Y_6,$ $[V_2, Y_6] = Y_4,$ $[Y_1, Y_i] = Y_{i+1}, \quad i = 2, 3, 4,$ $[Y_3, Y_2] = Y_6,$ $[Y_6, Y_2] = Y_5,$	$I_1 = \frac{2(y_1 y_6 + y_2 y_4 + y_5 v_2) - y_3^2}{y_5}$ $I_2 = \frac{(y_4^2 + y_6^2 - 2y_3 y_5)^2}{y_5^3}$
\mathfrak{r}_8^{40}	$[V_1, Y_i] = Y_i, \quad i = 1, 2,$ $[V_1, Y_i] = 2Y_i, \quad i = 3, 4$ $[V_1, Y_i] = 3Y_i, \quad i = 5, 6$ $[V_2, Y_i] = Y_{i+1}, \quad i = 2, 5, \quad [V_2, Y_i] = -Y_{i-1}, \quad i = 2, 6,$ $[Y_1, Y_i] = Y_{i+2}, \quad i = 2, 3, 4,$ $[Y_2, Y_3] = Y_6, \quad [Y_4, Y_2] = Y_5.$	aucun

TAB. 6.6 – Invariants des algèbres de Lie rigides résolubles réelles de dimension 8 et rang 3.

Algèbre	crochets	Invariants
\mathfrak{r}_8^{30}	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5,$ $[V_2, Y_5] = Y_5, \quad [V_3, Y_i] = Y_i, \quad i = 2, 3, 4,$ $[Y_1, Y_i] = Y_{i+1}, \quad i = 2, 3$	aucun
\mathfrak{r}_8^{31}	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5,$ $[V_2, Y_i] = Y_i, \quad i = 2, 3,$ $[V_3, Y_i] = Y_i, \quad i = 4, 5,$ $[Y_1, Y_i] = Y_{i+1}, \quad i = 2, 4$	aucun
\mathfrak{r}_8^{32}	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5,$ $[V_2, Y_i] = Y_i, \quad i = 2, 4, 5,$ $[V_3, Y_i] = Y_i, \quad i = 3, 4, 5,$ $[Y_1, Y_4] = [Y_2, Y_3] = Y_5$	$I_1 = \frac{v_1 y_5 + y_1 y_4 + 2y_2 y_3 - 5y_5 v_3}{y_5}$ $I_2 = \frac{v_2 y_5 - v_3 y_5 + y_2 y_3}{y_5}$

		TAB. 6.6 – suite	
Algèbre	crochets	Invariants	
\mathfrak{r}_8^{36}	$[V_1, Y_i] = Y_i, \quad i = 1, 4, 5,$ $[V_2, Y_i] = Y_i, \quad i = 2, 3, 4, 5$ $[V_3, Y_i] = -Y_{i+1}, \quad i = 2, 4$ $[V_3, Y_i] = Y_{i-1}, \quad i = 3, 5$ $[Y_1, Y_i] = Y_{i+2}, \quad i = 2, 3$	aucun	
\mathfrak{r}_8^{37}	$[V_1, Y_i] = Y_i, \quad i = 1, 2, 3, 4$ $[V_1, Y_5] = 2Y_5,$ $[V_2, Y_1] = -Y_2,$ $[V_2, Y_2] = Y_1,$ $[V_3, Y_3] = -Y_4,$ $[V_3, Y_4] = Y_3,$ $[Y_1, Y_2] = [Y_3, Y_4] = Y_5$	$I_1 = \frac{y_1^2 + y_2^2}{y_5} - 2v_2$ $I_2 = \frac{y_3^2 + y_4^2}{y_5} - 2v_3$	
\mathfrak{r}_8^{38}	$[V_1, Y_i] = Y_i, \quad i = 1, 2, 3, 4$ $[V_1, Y_5] = 2Y_5,$ $[V_2, Y_1] = Y_1,$ $[V_2, Y_2] = -Y_2,$ $[V_3, Y_3] = -Y_4,$ $[V_3, Y_4] = Y_3,$ $[Y_1, Y_2] = [Y_3, Y_4] = Y_5$	$I_1 = \frac{y_1 y_2}{y_5} + v_1$ $I_2 = \frac{y_3^2 + y_4^2}{y_5} - 2v_3$	

TAB. 6.7 – Invariants des algèbres de Lie rigides résolubles réelles de dimension 8 et rang 4.

Algèbre	crochets	Invariants
$\mathfrak{r}_8^{33} = \mathfrak{r}_2^1 \oplus \mathfrak{r}_2^1 \oplus \mathfrak{r}_2^1 \oplus \mathfrak{r}_2^1$	$[V_1, Y_i] = iY_i, \quad i = 1, 2, 3, 4,$ $[V_2, Y_2] = Y_2, \quad [V_3, Y_3] = Y_3, \quad [V_4, Y_4] = Y_4$	aucun
$\mathfrak{r}_8^{34} = \mathfrak{r}_4^2 \oplus \mathfrak{r}_4^2$	$[V_1, Y_1] = -Y_2,$ $[V_1, Y_2] = Y_1,$ $[V_2, Y_i] = Y_i \quad i = 1, 2$ $[V_3, Y_3] = -Y_4,$ $[V_3, Y_4] = Y_3,$ $[V_4, Y_i] = Y_i \quad i = 3, 4$	aucun
$\mathfrak{r}_8^{35} = \mathfrak{r}_4^2 \oplus \mathfrak{r}_2^1 \oplus \mathfrak{r}_2^1$	$[V_1, Y_1] = -Y_2,$ $[V_1, Y_2] = Y_1,$ $[V_2, Y_i] = Y_i \quad i = 1, 2$ $[V_3, Y_3] = Y_3, \quad [V_4, Y_4] = Y_4.$	aucun

6.5 Les algèbres de Lie résolubles rigides réelles ne sont pas nécessairement complètement résolubles

Définition 19 Une algèbre de Lie \mathfrak{r} de dimension n est dite complètement résoluble s'il existe une suite décroissante d'idéaux

$$\mathfrak{g} = I_0 \supset I_1 \supset \dots \supset I_{n-1} \supset I_n = 0$$

telle que $\dim_{\mathbb{K}} I_k / I_{k+1} = 1$ pour tout $k = 0, \dots, n-1$.

En particulier, toute algèbre complètement résoluble est résoluble, et sur un corps algébriquement fermé, la résolubilité et la résolubilité complète sont des propriétés équivalentes [23]. Ceci implique que toute algèbre de Lie résoluble rigide complexe est complètement résoluble.

Dans ce paragraphe on montre, par construction d'un exemple, que pour les algèbres de Lie réelles résolubles rigides la propriété de résolubilité complète ne reste pas valable si la forme réelle n'est pas la normale, c'est-à-dire, la forme obtenue par restriction de scalaires. L'exemple construit est aussi de dimension minimale.

Considérons les lois d'algèbres de Lie nilpotentes $\mathfrak{g}_1 = (\mathbb{R}^6, \mu_1)$ et $\mathfrak{g}_2 = (\mathbb{R}^6, \mu_2)$ définies dans une base $\{X_1, \dots, X_6\}$ par les crochets :

$$\begin{aligned} \mu_1(X_1, X_i) &= X_{i+1} \quad (2 \leq i \leq 4), & \mu_1(X_3, X_2) &= X_6, & \mu_1(X_6, X_2) &= X_5, \\ \mu_2(X_1, X_i) &= X_{i+1} \quad (2 \leq i \leq 4), & \mu_2(X_3, X_2) &= -X_6, & \mu_2(X_6, X_2) &= X_5, \end{aligned}$$

Les algèbres ne sont pas isomorphes, et correspondent aux classes d'isomorphisme $N_{6,6}$ et $N_{6,7}$ de la liste [20]. Si on considère le produit tensoriel, on a $\mathfrak{g}_1 \otimes \mathbb{C} \simeq \mathfrak{g}_2 \otimes \mathbb{C}$.

Lemme 3 L'algèbre $\mathfrak{g}_1 = (\mathbb{R}^6, \mu_1)$ admet une dérivation diagonalisable f_1^1 et une dérivation non-nilpotente f_1^2 données respectivement par

$$\begin{aligned} f_1^1(X_i) &= X_i \quad (i = 1, 2), & f_1^1(X_i) &= (i-1)X_i \quad (i = 3, 4, 5), & f_1^1(X_6) &= 3X_6. \\ f_1^2(X_1) &= X_2, & f_1^2(X_2) &= -X_1 & f_1^2(X_4) &= -X_6. & f_1^2(X_6) &= X_4. \end{aligned}$$

sur la base $\{X_1, \dots, X_6\}$. De plus, $f_1^1 \circ f_1^2 = f_1^2 \circ f_1^1$.

Il est facile de voir que toute dérivation non nilpotente de l'algèbre (\mathbb{R}^6, μ_1) fait intervenir une combinaison linéaire des dérivations f_1^1 et f_1^2 . Comme le polynôme caractéristique de f_1^2 sur la base donnée est $P(T) = T^2(T^2 + 1)^2$, cette dérivation n'est pas diagonalisable sur \mathbb{R} . De cette façon, on obtient une algèbre abélienne $\mathfrak{t} \in \text{Der}(\mathfrak{g}_1)$ constituée par dérivations non nilpotentes, mais dont seulement une est diagonalisable.

Lemme 4 L'algèbre $\mathfrak{g}_2 = (\mathbb{R}^6, \mu_2)$ admet un tore extérieur \mathfrak{t} de rang 2.

Toute dérivation non nilpotente de l'algèbre (\mathbb{R}^6, μ_2) fait intervenir une combinaison linéaire des dérivations

$$\begin{aligned} g_1^1(X_i) &= X_i \quad (i = 1, 2), & g_1^1(X_i) &= (i-1)X_i \quad (i = 3, 4, 5), & g_1^1(X_6) &= 3X_6. \\ g_1^2(X_1) &= X_2, & g_1^2(X_2) &= X_1 & g_1^2(X_4) &= X_6. & g_1^2(X_6) &= X_4. \end{aligned}$$

Il est immédiat que les dérivations sont diagonalisables, et sur la base de vecteurs propres

$$\left\{ \begin{aligned} X'_1 &= \frac{1}{2}(X_1 + X_2), X'_2 = \frac{1}{2}(X_2 - X_1), & X'_3 &= \frac{1}{2}X_3, X'_4 = \frac{1}{4}(X_4 - X_6), \\ X'_5 &= \frac{1}{4}(X_6 + X_4), X'_6 = \frac{1}{4}X_5 \end{aligned} \right\}$$

on obtient les crochets

$$\mu_2(X'_1, X'_i) = X'_{i+1} \quad (i = 2, 3, 5), \quad \mu_2(X'_3, X'_2) = -X'_5, \quad \mu_2(X'_2, X'_4) = X'_6.$$

Les valeurs propres des dérivations g_1^1 et g_1^2 sont, respectivement

$$\begin{aligned} \sigma(g_1^1) &= (1, 1, 2, 3, 3, 4) \\ \sigma(g_1^2) &= (-1, 1, 0, -1, 1, 0). \end{aligned}$$

Par commodité, on considère les dérivations $f_2^1 = \frac{1}{2}(3g_1^1 + g_1^2)$ et $f_2^2 = \frac{1}{2}(g_1^1 + g_1^2)$. Pour cette base du tore \mathfrak{t} , les valeurs propres sont :

$$\begin{aligned} f_2^1(X'_i) &= iX'_i \quad (1 \leq i \leq 6), \\ f_2^2(X'_i) &= X'_i \quad (2 \leq i \leq 4), \quad f_2^2(X'_i) = 2X'_i \quad (i = 5, 6). \end{aligned}$$

Soient $\widehat{\mathfrak{g}}_1 = (\mathbb{R}^8, \widehat{\mu}_1)$ et $\widehat{\mathfrak{g}}_2 = (\mathbb{R}^8, \widehat{\mu}_2)$ les algèbres résolubles non nilpotentes définies par

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_1(X_1, X_i) &= X_{i+1} \quad (2 \leq i \leq 4), & \widehat{\mu}_1(X_3, X_2) &= X_6, & \widehat{\mu}_1(X_6, X_2) &= X_5, \\ \widehat{\mu}_1(X_7, X_i) &= X_i \quad (i = 1, 2), & \widehat{\mu}_1(X_7, X_3) &= 2X_3, & \widehat{\mu}_1(X_7, X_5) &= 4X_5, \\ \widehat{\mu}_1(X_7, X_i) &= 3X_i \quad (i = 4, 6), & \widehat{\mu}_1(X_8, X_1) &= X_2, & \widehat{\mu}_1(X_8, X_2) &= -X_1, \\ \widehat{\mu}_1(X_8, X_4) &= -X_6, & \widehat{\mu}_1(X_8, X_6) &= X_4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_2(X_1, X_i) &= X_{i+1} \quad (i = 2, 3, 5), & \widehat{\mu}_2(X_3, X_2) &= -X_5, & \widehat{\mu}_2(X_2, X_4) &= X_6, \\ \widehat{\mu}_2(X_7, X_i) &= X_i \quad 1 \leq i \leq 6, & \widehat{\mu}_2(X_8, X_i) &= X_i, & (i = 2, 3, 4), \\ \widehat{\mu}_2(X_8, X_i) &= 2X_i \quad (i = 5, 6). \end{aligned}$$

sur une base $\{X_1, \dots, X_8\}$. On observe que le nilradical de $\widehat{\mathfrak{g}}_i$ est isomorphe à \mathfrak{g}_i pour $i = 1, 2$. Pour la deuxième algèbre, nous utilisons une base de vecteurs propres de \mathfrak{g}_2 .

Lemme 5 *Les algèbres $\widehat{\mathfrak{g}}_1 \otimes \mathbb{C} \simeq \widehat{\mathfrak{g}}_2 \otimes \mathbb{C}$ sont isomorphes. De plus, l'algèbre $\widehat{\mathfrak{g}}_1 \otimes \mathbb{C}$ est rigide à cohomologie nulle.*

En effet, l'algèbre $\widehat{\mathfrak{g}}_1 \otimes \mathbb{C}$ coïncide avec l'algèbre résoluble rigide \mathfrak{r}_8^{22} de la liste [8]. En particulier, il en résulte que $H^2(\mathfrak{g}_1 \otimes \mathbb{C}, \mathfrak{g}_1 \otimes \mathbb{C}) = 0$.

Théorème 14 *Les algèbres de Lie $\widehat{\mathfrak{g}}_1$ et $\widehat{\mathfrak{g}}_2$ sont rigides complètes sur \mathbb{R} . De plus, $\widehat{\mathfrak{g}}_1$ n'est pas complètement résoluble.*

Démonstration. D'après le lemme 3, l'algèbre complexifiée $\widehat{\mathfrak{g}}_2 \otimes \mathbb{C}$ de $\widehat{\mathfrak{g}}_2$ est rigide et satisfait $H^2(\widehat{\mathfrak{g}}_2 \otimes \mathbb{C}, \widehat{\mathfrak{g}}_2 \otimes \mathbb{C}) = 0$. D'après les propriétés de la cohomologie, le deuxième groupe de cohomologie de $\widehat{\mathfrak{g}}_1$ et $\widehat{\mathfrak{g}}_1$

est aussi nul, ce qui montre la rigidité en appliquant le théorème de Nijenhuis et Richardson. Considérons l'opérateur adjoint $ad_{\hat{\mu}_1}(X_8)$. Sur la base $\{X_1, \dots, X_8\}$, cet opérateur est donné par la matrice

$$ad_{\hat{\mu}_1}(X_8) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et comme le polynôme minimal est $m(T) = T + T^3$, $ad_{\hat{\mu}_1}(X_8)$ n'est pas diagonalisable sur \mathbb{R} , alors l'algèbre n'est pas complètement résoluble.

D'un autre côté, l'algèbre $\hat{\mathfrak{g}}_2$ et l'algèbre r_g^{22} dans [8] ont les mêmes constantes de structure, ce qui prouve que cette forme réelle est la normale. La complétude est une conséquence de la suite bien connue [18] :

$$\dim Der(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g} + \dim H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$$

et la nullité du groupe de cohomologie. L'algèbre $\hat{\mathfrak{g}}_1$ admet une décomposition $\hat{\mathfrak{g}}_1 = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{t}$, où \mathfrak{t} est une sous-algèbre abélienne de $Der \mathfrak{g}_1$ engendrée par X_7 et X_8 . Cependant, tout vecteur de $\hat{\mathfrak{g}}_1$ qui soit ad-semi-simple fait intervenir une combinaison linéaire des vecteurs X_7 et X_8 , et comme $ad_{\hat{\mu}_1}(X_8)$ n'est pas diagonalisable, la seule possibilité est de considérer des multiples du vecteur X_7 . De cette façon, au contraire du cas complexe, l'algèbre $\hat{\mathfrak{g}}_1$ n'admet pas une décomposition du type $\hat{\mathfrak{g}}_1 = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{k}$, où \mathfrak{k} est une sous-algèbre abélienne de $Der(\mathfrak{g}_1)$ générée par des éléments ad-semi-simples. Dans ce cas l'algèbre \mathfrak{t} joue le rôle du tore maximal de dérivations et tout système linéaire de racines associé au vecteur régulier X_7 est de corang 1 et $\dim \mathfrak{t} = 2$. Cette remarque montre que, pour couvrir le cas réel, la théorie des systèmes linéaires obtenue en [7], ainsi comme les notions du graphe des poids [5, 11], doivent être modifiées. En particulier, on obtient le critère suivant :

Proposition 18 *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie résoluble rigide complexe de dimension inférieure ou égale à 8. Alors seulement la forme réelle normale $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est complètement résoluble.*

Démonstration. En effet, si \mathfrak{g} admet des formes réelles, la forme normale a les mêmes constantes de structure, alors elle est complètement résoluble. Comme dans tous les cas la partie nilpotente a des constantes de structure sur \mathbb{R} , si la forme réelle \mathfrak{g}' n'est pas la normale, alors son nilradical possède une dérivation non diagonale sur \mathbb{R} mais sur \mathbb{C} qui appartient au tore extérieur. En conséquence, \mathfrak{g}' n'est pas complètement résoluble.

Chapitre 7

Sur les algèbres de Lie quasi-filiformes admettant un tore de dérivations

7.1 Antécédents

Dans [29], on étudie une classe d'algèbres complexes filiformes plus large que les graduées naturellement, la graduation étant définie par les racines d'un tore externe non nul de dimension quelconque.

Proposition 19 *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie filiforme de dimension n admettant une dérivation diagonale f non nulle. Il existe alors une base de \mathfrak{g} , $\{Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}\}$, formée de vecteurs propres de f dont les crochets vérifient l'un des cas suivants :*

1. $\mathfrak{g} = L_n$, $n \geq 3$

$$[Y_0, Y_i] = Y_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-2;$$

2. $\mathfrak{g} = A_n^k(\alpha_1, \dots, \alpha_{t-1})$, $n \geq 3$, $t = \frac{n-k+1}{2}$, $2 \leq k \leq n-3$

$$\begin{aligned} [Y_0, Y_i] &= Y_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\ [Y_i, Y_{i+1}] &= \alpha_i Y_{2i+k}, & 1 \leq i \leq t-1, \\ [Y_i, Y_j] &= a_{i,j} Y_{i+j+k-1}, & 1 \leq i < j, \quad i+j \leq n-k; \end{aligned}$$

3. $\mathfrak{g} = Q_n$, $n = 2m$, $m \geq 3$

$$\begin{aligned} [Y_0, Y_i] &= Y_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [Y_j, Y_{n-j-1}] &= (-1)^{j-1} Y_{n-1}, & 1 \leq j \leq m-1; \end{aligned}$$

4. $\mathfrak{g} = B_n^k(\alpha_1, \dots, \alpha_{t-1})$, $n = 2m$, $m \geq 3$, $t = \frac{n-k}{2}$, $2 \leq k \leq n-3$

$$\begin{aligned} [Y_0, Y_i] &= Y_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [Y_j, Y_{n-j-1}] &= (-1)^{j-1} Y_{n-1}, & 1 \leq j \leq m-1, \\ [Y_i, Y_{i+1}] &= \alpha_i Y_{2i+k}, & 1 \leq i \leq t-1, \\ [Y_i, Y_j] &= a_{i,j} Y_{i+j+k-1}, & 1 \leq i < j, \quad i+j \leq n-k-1; \end{aligned}$$

où $(\alpha_1, \dots, \alpha_{t-1})$ sont des paramètres vérifiant les relations polynomiales découlant des identités de Jacobi et les constantes $a_{i,j}$ vérifient le système :

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= 0, \\ a_{i,i+1} &= \alpha_i, \\ a_{i,j} &= a_{i+1,j} + a_{i,j+1}. \end{aligned}$$

De plus, si λ_0 et λ_1 représentent les valeurs propres de f associées respectivement aux vecteurs propres Y_0 et Y_1 , alors f prend, dans chacun des cas, la forme diagonale suivante :

1. $f \sim \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_0 + \lambda_1, 2\lambda_0 + \lambda_1, \dots, (n-2)\lambda_0 + \lambda_1)$
2. $f \sim \text{diag}(\lambda_0, k\lambda_0, (k+1)\lambda_0, (k+2)\lambda_0, \dots, (n+k-2)\lambda_0)$
3. $f \sim \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_0 + \lambda_1, 2\lambda_0 + \lambda_1, \dots, (n-3)\lambda_0 + \lambda_1, (n-3)\lambda_0 + 2\lambda_1)$
4. $f \sim \text{diag}(\lambda_0, k\lambda_0, (k+1)\lambda_0, (k+2)\lambda_0, \dots, (n+k-3)\lambda_0, (n+2k-3)\lambda_0)$

Remarque. Dans la référence [29], on considère aussi les algèbres $C_n(\alpha_1, \dots, \alpha_{m-2})$ où $n = 2m$, définies dans la base $\{Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}\}$ par :

$$\begin{aligned} [Y_0, Y_i] &= Y_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [Y_i, Y_{n-i-1}] &= (-1)^i Y_{n-1}, & 1 \leq i \leq m-1, \\ [Y_i, Y_{n-(2k+1)-i}] &= (-1)^{i+1} \alpha_k Y_{n-1}, & 1 \leq i \leq m-k-1, 1 \leq k \leq m-2. \end{aligned}$$

Il existe un changement de variables tel que ces algèbres adoptent la même forme avec $\alpha_1 = \dots = \alpha_{m-2} = 0$. En effet, pour éliminer le paramètre α_1 , il suffit de faire le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} Z_0 &= Y_0, \\ Z_1 &= Y_1 + \frac{\alpha_1}{2} Y_3, \\ Z_{i+1} &= [Z_0, Z_i], \quad 1 \leq i \leq n-3, \\ Z_{n-1} &= Y_{n-1}, \end{aligned}$$

et, de plus, si $\alpha_{j+1} = \dots = \alpha_{m-2} = 0$, le changement de variables $Y_i \rightarrow Y_i + \frac{\alpha_i}{2} Y_{i+2j}$ pour $i = 1, \dots, n-2-2j$, nous permet d'annuler le paramètre α_j .

On en conclut que les algèbres C_n sont isomorphes à Q_n et donc de rang 2. Le résultat de [29] doit donc être lu comme dans la proposition 19.

Le but de ce chapitre est de donner la classification des algèbres quasi-filiformes de rang non nul.

7.2 Algèbres de Lie quasi-filiformes et bases adaptées

De la classification des algèbres de Lie quasi-filiformes graduées naturellement, on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 5 *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie quasi-filiforme de dimension n . Alors, grg est isomorphe à l'une des algèbres de la proposition 2, $C_{i,j}^k$ dénotent les constantes de structure de cette algèbre dans la base*

où on l'a définie. Il existe alors une base $\{X_0, X_1, X_2, \dots, X_{n-1}\}$ de \mathfrak{g} telle que :

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] - \sum_{k=0}^{n-1} C_{0,i}^k X_k &\in \mathfrak{g}_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [X_i, X_j] - \sum_{k=0}^{n-1} C_{i,j}^k X_k &\in \mathfrak{g}_{i+j}, & 1 \leq i < j \leq n-2-i, \\ [X_i, X_{n-1}] - \sum_{k=0}^{n-1} C_{i,n-1}^k X_k &\in \mathfrak{g}_{i+r}, & 1 \leq i \leq n-2-r, \\ [X_i, X_{n-2}] &= 0, & 0 \leq i \leq n-1, \end{aligned}$$

et, de plus :

1. Si $\text{grg} \simeq \mathfrak{L}_{n-1} \oplus \mathbb{C}$,

$$[X_0, X_i] = X_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-3;$$

2. Si $\text{grg} \simeq \mathfrak{Q}_{n-1} \oplus \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4, \\ [X_1, X_{n-2}] &= X_{n-2}; \end{aligned}$$

3. Si $\text{grg} \simeq \mathfrak{L}_{n,r}$,

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & i = 1, \dots, n-3, \\ [X_1, X_{r-1}] &= X_{n-1}; \end{aligned}$$

4. Si $\text{grg} \simeq \mathfrak{Q}_{n,r}$,

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & i = 1, \dots, n-4, \\ [X_1, X_{r-1}] &= X_{n-1}, \\ [X_1, X_{n-3}] &= X_{n-2}; \end{aligned}$$

5. Si $\text{grg} \simeq \mathfrak{T}_{n,n-4}$,

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & i = 1, \dots, n-5, \\ [X_0, X_{n-3}] &= X_{n-2}, \\ [X_0, X_{n-1}] &= X_{n-3}, \\ [X_1, X_{n-5}] &= X_{n-1}; \end{aligned}$$

6. Si $\text{grg} \simeq \mathfrak{T}_{n,n-3}$,

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & i = 1, \dots, n-4, \\ [X_0, X_{n-1}] &= X_{n-2}, \\ [X_1, X_{n-4}] &= X_{n-1}; \end{aligned}$$

7. Si $\text{grg} \simeq \mathfrak{E}_{9,5}^j$ avec $j \in \{1, 2, 3\}$,

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \\ [X_1, X_4] &= X_8; \end{aligned}$$

8. Si $\text{grg} \simeq \mathfrak{E}_{7,3}$,

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & i = 1, 2, 3, 4, \\ [X_1, X_2] &= X_6. \end{aligned}$$

La base $\{X_0, X_1, X_2, \dots, X_{n-1}\}$ ainsi définie est appelée base adaptée.

7.3 Classification des algèbres de Lie quasi-filiformes de rang non nul

Rappelons qu'un tore maximal de dérivations de \mathfrak{g} est une sous-algèbre abélienne maximale de l'algèbre des dérivations $Der(\mathfrak{g})$ formée de dérivations ad-diagonalisables [36]. Tous ces tores maximaux sont conjugués par automorphismes, ce qui permet de définir le rang d'une algèbre de Lie comme la dimension commune des tores maximaux de \mathfrak{g} .

Théorème 15 *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie quasi-filiforme de dimension n admettant une dérivation diagonale f non nulle. Il existe alors une base de \mathfrak{g} , $\{Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}\}$, formée de vecteurs propres de f dont les crochets vérifient l'un des cas suivants :*

1. Si $\text{grg} \simeq \mathfrak{L}_{n-1} \oplus \mathbb{C}$ ($n \geq 4$) alors

$$(a) \quad \mathfrak{g} = L_{n-1} \oplus \mathbb{C}$$

$$[Y_0, Y_i] = Y_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-3,$$

$$f \sim \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_0 + \lambda_1, 2\lambda_0 + \lambda_1, \dots, (n-3)\lambda_0 + \lambda_1, \lambda_{n-1}),$$

$$(b) \quad \mathfrak{g} = A_{n-1}^k(\alpha_1, \dots, \alpha_{t-1}) \oplus \mathbb{C}, \quad t = \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor, \quad 2 \leq k \leq n-4$$

$$[Y_0, Y_i] = Y_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-3,$$

$$[Y_i, Y_{i+1}] = \alpha_i Y_{2i+k}, \quad 1 \leq i \leq t-1,$$

$$[Y_i, Y_j] = a_{i,j} Y_{i+j+k-1}, \quad 1 \leq i < j, \quad i+j \leq n-k-1,$$

$$f \sim \text{diag}(\lambda_0, k\lambda_0, (k+1)\lambda_0, (k+2)\lambda_0, \dots, (k+n-3)\lambda_0, \lambda_{n-1}),$$

$$(c) \quad \mathfrak{g} = L_{n-1} \overrightarrow{\oplus}_l \mathbb{C} \quad (2 \leq l \leq n-3)$$

$$[Y_0, Y_i] = Y_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-3,$$

$$[Y_i, Y_{n-1}] = Y_{i+l}, \quad 1 \leq i \leq n-l-2,$$

$$f \sim \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_0 + \lambda_1, 2\lambda_0 + \lambda_1, \dots, (n-3)\lambda_0 + \lambda_1, l\lambda_0),$$

$$(d) \quad \mathfrak{g} = A_{n-1}^k(\alpha_1, \dots, \alpha_{t-1}) \overrightarrow{\oplus}_l \mathbb{C} \quad t = \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor \quad 2 \leq k \leq n-4 \quad 2 \leq l \leq n-3$$

$$[Y_0, Y_i] = Y_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-3,$$

$$[Y_i, Y_{n-1}] = Y_{i+l}, \quad 1 \leq i \leq n-l-2,$$

$$[Y_i, Y_{i+1}] = \alpha_i Y_{2i+k}, \quad 1 \leq i \leq t-1,$$

$$[Y_i, Y_j] = a_{i,j} Y_{i+j+k-1}, \quad 1 \leq i < j, \quad i+j \leq n-k-1,$$

$$f \sim \text{diag}(\lambda_0, k\lambda_0, (k+1)\lambda_0, (k+2)\lambda_0, \dots, (k+n-3)\lambda_0, l\lambda_0).$$

2. Si $\text{grg} \simeq \mathfrak{Q}_{n-1} \oplus \mathbb{C}$ ($n \geq 7$, n impair) alors

$$(a) \quad \mathfrak{g} = Q_{n-1} \oplus \mathbb{C}$$

$$[Y_0, Y_i] = Y_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-4,$$

$$[Y_i, Y_{n-i-1}] = (-1)^{i-1} Y_{n-2}, \quad 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2},$$

$$f \sim \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_0 + \lambda_1, 2\lambda_0 + \lambda_1, \dots, (n-4)\lambda_0 + \lambda_1, (n-4)\lambda_0 + 2\lambda_1, \lambda_{n-1}),$$

$$(b) \mathfrak{g} = B_{n-1}^k(\alpha_1, \dots, \alpha_{t-1}) \oplus \mathbb{C} \quad t = \left\lceil \frac{n-k-1}{2} \right\rceil \quad 2 \leq k \leq n-5$$

$$\begin{aligned} [Y_0, Y_i] &= Y_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4, \\ [Y_i, Y_{n-i-2}] &= (-1)^{i-1} Y_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}, \\ [Y_i, Y_{i+1}] &= \alpha_i Y_{2i+k-1}, & 1 \leq i \leq t-1, \\ [Y_i, Y_j] &= a_{i,j} Y_{i+j+k-1}, & 1 \leq i < j, \quad i+j \leq n-k-2, \end{aligned}$$

$$f \sim \text{diag}(\lambda_0, k\lambda_0, (k+1)\lambda_0, (k+2)\lambda_0, \dots, (n-4+k)\lambda_0, (n-4+2k)\lambda_0, \lambda_{n-1}),$$

$$(c) \mathfrak{g} = Q_{n-1} \overrightarrow{\oplus}_l^a \mathbb{C} \quad 2 \leq l \leq n-4$$

$$\begin{aligned} [Y_0, Y_i] &= Y_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4, \\ [Y_i, Y_{n-i-2}] &= (-1)^{i-1} Y_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}, \\ [Y_i, Y_{n-1}] &= Y_{i+l}, & 1 \leq i \leq n-l-3, \end{aligned}$$

$$f \sim \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_0 + \lambda_1, 2\lambda_0 + \lambda_1, \dots, (n-4)\lambda_0 + \lambda_1, (n-4)\lambda_0 + 2\lambda_1, l\lambda_0),$$

$$(d) \mathfrak{g} = B_{n-1}^k(\alpha_1, \dots, \alpha_{t-1}) \overrightarrow{\oplus}_l^a \mathbb{C} \quad t = \left\lceil \frac{n-k-1}{2} \right\rceil \quad 2 \leq k \leq n-5, \quad 2 \leq l \leq n-4$$

$$\begin{aligned} [Y_0, Y_i] &= Y_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4, \\ [Y_i, Y_{n-i-2}] &= (-1)^{i-1} Y_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}, \\ [Y_i, Y_{i+1}] &= \alpha_i Y_{2i+k}, & 1 \leq i \leq t-1, \\ [Y_i, Y_j] &= a_{i,j} Y_{i+j+k-1}, & 1 \leq i < j, \quad i+j \leq n-k-2, \\ [Y_i, Y_{n-1}] &= Y_{i+l}, & 1 \leq i \leq n-l-3, \end{aligned}$$

$$f \sim \text{diag}(\lambda_0, k\lambda_0, (k+1)\lambda_0, (k+2)\lambda_0, \dots, (n-4+k)\lambda_0, (n-4+2k)\lambda_0, l\lambda_0),$$

$$(e) \mathfrak{g} = Q_{n-1} \overrightarrow{\oplus}_l^b \mathbb{C} \quad 2 \leq l \leq n-4$$

$$\begin{aligned} [Y_0, Y_i] &= Y_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4, \\ [Y_i, Y_{n-i-2}] &= (-1)^{i-1} Y_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}, \\ [Y_0, Y_{n-1}] &= Y_{n-2}, \\ [Y_i, Y_{n-1}] &= Y_{i+l}, & 1 \leq i \leq n-l-3, \end{aligned}$$

$$f \sim \text{diag}(\lambda_0, \beta\lambda_0, (k+1)\lambda_0, (\beta+2)\lambda_0, \dots, (n-4+\beta)\lambda_0, (n-4+2\beta)\lambda_0, (n-5+2\beta)\lambda_0)$$

$$\text{où } \beta = \frac{l-n+5}{2},$$

$$(f) \mathfrak{g} = Q_{n-1} \overrightarrow{\oplus}^c \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} [Y_0, Y_i] &= Y_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4, \\ [Y_i, Y_{n-i-2}] &= (-1)^{i-1} Y_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}, \\ [Y_0, Y_{n-1}] &= Y_{n-2}, \end{aligned}$$

$$f \sim \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_0 + \lambda_1, 2\lambda_0 + \lambda_1, \dots, (n-4)\lambda_0 + \lambda_1, (n-4)\lambda_0 + 2\lambda_1, (n-5)\lambda_0 + 2\lambda_1),$$

$$(g) \mathfrak{g} = B_{n-1}^k(\alpha_1, \dots, \alpha_{t-1}) \overrightarrow{\oplus}^c \mathbb{C} \quad t = \left\lceil \frac{n-k-1}{2} \right\rceil \quad 2 \leq k \leq n-5$$

$$\begin{aligned} [Y_0, Y_i] &= Y_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4, \\ [Y_i, Y_{n-i-2}] &= (-1)^{i-1} Y_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}, \\ [Y_i, Y_{i+1}] &= \alpha_i Y_{2i+k}, & 1 \leq i \leq t-1, \\ [Y_i, Y_j] &= a_{i,j} Y_{i+j+k-1}, & 1 \leq i < j, \quad i+j \leq n-k-2, \\ [Y_0, Y_{n-1}] &= Y_{n-2}, \end{aligned}$$

$$f \sim \text{diag}(\lambda_0, k\lambda_0, (k+1)\lambda_0, (k+2)\lambda_0, \dots, (n-4+k)\lambda_0, (n-4+2k)\lambda_0, (n-5+2k)\lambda_0),$$

3. Si $\text{grg} \simeq \mathfrak{L}_{n,r}$ ($n \geq 5$, r impair, $3 \leq r \leq 2[\frac{n-1}{2}] - 1$) alors $\text{ty}(\mathfrak{g}) = 2$ et

(a) $\mathfrak{g} = \mathfrak{L}_{n,r}$

$$\begin{aligned} [Y_0, Y_i] &= Y_{i+1}, & i &= 1, \dots, n-3, \\ [Y_i, Y_{r-i}] &= (-1)^{i-1} Y_{n-1}, & i &= 1, \dots, \frac{r-1}{2} \end{aligned}$$

$$f \sim \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_0 + \lambda_1, 2\lambda_0 + \lambda_1, \dots, (n-3)\lambda_0 + \lambda_1, (r-2)\lambda_0 + 2\lambda_1),$$

(b) $\mathfrak{g} = \mathfrak{C}_{n,r}^t(\alpha_1, \dots, \alpha_{t-1})$, $2 \leq k \leq n-4$, $t = [\frac{n-k}{2}]$

$$\begin{aligned} [Y_0, Y_i] &= Y_{i+1}, & i &= 1, \dots, n-3 \\ [Y_i, Y_{r-i}] &= \begin{cases} (-1)^{i-1} Y_{n-1} + a_{i,r-i} Y_{r+k-1} & \text{si } k \leq n-r-1, \\ (-1)^{i-1} Y_{n-1} & \text{si } k > n-r-1, \end{cases} & i &= 1, \dots, \frac{r-1}{2} \\ [Y_i, Y_{i+1}] &= \alpha_i Y_{2i+k}, & i &= 1, \dots, t-1 \\ [Y_i, Y_j] &= a_{i,j} Y_{i+j+k-1}, & 1 \leq i < j < n-1, & r \neq i+j \leq n-k-1, \\ [Y_i, Y_{n-1}] &= Y_{2k+r+i-2}, & i &= 1, \dots, n-r-2k \end{aligned}$$

$$f \sim \text{diag}(\lambda_0, k\lambda_0, (1+k)\lambda_0, (2+k)\lambda_0, \dots, (n-3+k)\lambda_0, (r-2+2k)\lambda_0),$$

(c) $\mathfrak{g} = \mathfrak{D}_{n,r}^t$, $1 \leq k \leq [\frac{n-r-2}{2}]$

$$\begin{aligned} [Y_0, Y_i] &= Y_{i+1}, & i &= 1, \dots, n-3 \\ [Y_i, Y_{r-i}] &= (-1)^{i-1} Y_{n-1}, & i &= 1, \dots, \frac{r-1}{2} \\ [Y_i, Y_{n-1}] &= Y_{2k+r+i-1}, & i &= 1, \dots, n-r-2k-1 \end{aligned}$$

$$f \sim \text{diag}(\lambda_0, (k + \frac{1}{2})\lambda_0, (k + \frac{3}{2})\lambda_0, (k + \frac{5}{2})\lambda_0, \dots, (k + \frac{2n-5}{2})\lambda_0, (r-1+2k)\lambda_0)$$

4. Si $\text{grg} \simeq \mathfrak{Q}_{n,r}$ ($n \geq 7$, n impair, r impair, $3 \leq r \leq n-4$) alors $\text{ty}(\mathfrak{g}) = 2$ et

(a) $\mathfrak{g} = \mathfrak{Q}_{n,r}$

$$\begin{aligned} [Y_0, Y_i] &= Y_{i+1}, & i &= 1, \dots, n-4 \\ [Y_i, Y_{r-i}] &= (-1)^{i-1} Y_{n-1}, & i &= 1, \dots, \frac{r-1}{2} \\ [Y_i, Y_{n-2-i}] &= (-1)^{i-1} Y_{n-2}, & i &= 1, \dots, \frac{n-3}{2} \end{aligned}$$

$$f \sim \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_0 + \lambda_1, 2\lambda_0 + \lambda_1, \dots, (n-4)\lambda_0 + \lambda_1, (n-4)\lambda_0 + 2\lambda_1, (r-2)\lambda_0 + 2\lambda_1),$$

(b) $\mathfrak{g} = \mathfrak{C}_{n,r}^t(\alpha_1, \dots, \alpha_{t-1})$, $2 \leq k \leq n-5$, $t = [\frac{n-k-1}{2}]$

$$\begin{aligned} [Y_0, Y_i] &= Y_{i+1}, & i &= 1, \dots, n-4 \\ [Y_i, Y_{r-i}] &= \begin{cases} (-1)^{i-1} Y_{n-1} + a_{i,r-i} Y_{r+k-1} & \text{si } k \leq n-r-2, \\ (-1)^{i-1} Y_{n-1} & \text{si } k > n-r-2, \end{cases} & i &= 1, \dots, \frac{r-1}{2} \\ [Y_i, Y_{n-2-i}] &= (-1)^{i-1} Y_{n-2}, & i &= 1, \dots, \frac{n-3}{2} \\ [Y_i, Y_{i+1}] &= \alpha_i Y_{2i+k}, & i &= 1, \dots, t-1 \\ [Y_i, Y_j] &= a_{i,j} Y_{i+j+k-1}, & 1 \leq i < j < n-1, & r \neq i+j \leq n-k-2 \\ [Y_i, Y_{n-1}] &= Y_{2k+r+i-2}, & i &= 1, \dots, n-r-2k-1 \end{aligned}$$

$$f \sim \text{diag}(\lambda_0, k\lambda_0, (1+k)\lambda_0, (2+k)\lambda_0, \dots, (n-4+k)\lambda_0, (n-4+2k)\lambda_0, (r-2+2k)\lambda_0),$$

$$(c) \mathfrak{g} = \mathfrak{F}_{n,r}^t, \quad 1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-r-4}{2} \rfloor$$

$$\begin{aligned} [Y_0, Y_i] &= Y_{i+1}, & i &= 1, \dots, n-4 \\ [Y_i, Y_{r-i}] &= (-1)^{i-1} Y_{n-1}, & i &= 1, \dots, \frac{r-1}{2} \\ [Y_i, Y_{n-2-i}] &= (-1)^{i-1} Y_{n-2}, & i &= 1, \dots, \frac{n-3}{2} \\ [Y_i, Y_{n-1}] &= Y_{2k+r+i-1}, & i &= 1, \dots, n-r-2k-2 \end{aligned}$$

$$f \sim \text{diag}(\lambda_0, (k + \frac{1}{2})\lambda_0, (k + \frac{3}{2})\lambda_0, (k + \frac{5}{2})\lambda_0, \dots, (k + \frac{2n-7}{2})\lambda_0, (n+2k-3)\lambda_0, (r+2k-1)\lambda_0),$$

5. Si $\text{grg} \simeq \mathfrak{T}_{n,n-4}$ ($n \geq 7$, n impair) alors $\text{ty}(\mathfrak{g}) = 2$ et

$$(a) \mathfrak{g} = \mathfrak{T}_{n,n-4}$$

$$\begin{aligned} [Y_0, Y_i] &= Y_{i+1}, & i &= 1, \dots, n-5 \\ [Y_0, Y_{n-3}] &= Y_{n-2}, \\ [Y_0, Y_{n-1}] &= Y_{n-3}, \\ [Y_i, Y_{n-4-i}] &= (-1)^{i-1} Y_{n-1}, & i &= 1, \dots, \frac{n-5}{2} \\ [Y_i, Y_{n-3-i}] &= (-1)^{i-1} \frac{n-3-2i}{2} Y_{n-3}, & i &= 1, \dots, \frac{n-5}{2} \\ [Y_i, Y_{n-2-i}] &= (-1)^i (i-1) \frac{n-3-i}{2} Y_{n-2}, & i &= 2, \dots, \frac{n-3}{2} \end{aligned}$$

$$f \sim \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_0 + \lambda_1, 2\lambda_0 + \lambda_1, \dots, (n-5)\lambda_0 + \lambda_1, (n-5)\lambda_0 + 2\lambda_1, (n-4)\lambda_0 + 2\lambda_1, (n-6)\lambda_0 + 2\lambda_1),$$

$$(b) \mathfrak{g} = \mathfrak{G}_{n,r}^t(\alpha_1, \dots, \alpha_{t-1}), \quad 2 \leq k \leq n-6, \quad t = \lfloor \frac{n-k-2}{2} \rfloor$$

$$\begin{aligned} [Y_0, Y_i] &= Y_{i+1}, & i &= 1, \dots, n-5 \\ [Y_0, Y_{n-3}] &= Y_{n-2}, \\ [Y_0, Y_{n-1}] &= Y_{n-3}, \\ [Y_1, Y_{n-1}] &= Y_{n-2} & \text{si } k &= 2 \\ [Y_i, Y_{n-4-i}] &= (-1)^{i-1} Y_{n-1}, & i &= 1, \dots, \frac{n-5}{2} \\ [Y_i, Y_{n-3-i}] &= (-1)^{i-1} \frac{n-3-2i}{2} Y_{n-3}, & i &= 1, \dots, \frac{n-5}{2} \\ [Y_i, Y_{n-2-i}] &= (-1)^i (i-1) \frac{n-2-i}{2} Y_{n-2}, & i &= 1, \dots, \frac{n-3}{2} \\ [Y_i, Y_{i+1}] &= \alpha_i Y_{2i+k}, & i &= 1, \dots, t-1 \\ [Y_i, Y_j] &= a_{i,j} Y_{i+j+k-1}, & 1 \leq i < j < n-2, i+j &\leq n-k-3 \end{aligned}$$

$$f \sim \text{diag}(\lambda_0, k\lambda_0, (1+k)\lambda_0, (2+k)\lambda_0, \dots, (n-5+k)\lambda_0, (n-5+2k)\lambda_0, (n-4+2k)\lambda_0, (n-6+2k)\lambda_0),$$

6. Si $\text{grg} \simeq \mathfrak{T}_{n,n-3}$ ($n \geq 6$, n pair) alors $\text{ty}(\mathfrak{g}) = 2$ et

$$(a) \mathfrak{g} = \mathfrak{T}_{n,n-3}$$

$$\begin{aligned} [Y_0, Y_i] &= Y_{i+1}, & i &= 1, \dots, n-4 \\ [Y_0, Y_{n-1}] &= Y_{n-2}, \\ [Y_i, Y_{n-3-i}] &= (-1)^{i-1} Y_{n-1}, & i &= 1, \dots, \frac{n-4}{2} \\ [Y_i, Y_{n-2-i}] &= (-1)^{i-1} \frac{n-2-2i}{2} Y_{n-2}, & i &= 1, \dots, \frac{n-4}{2} \end{aligned}$$

$$f \sim \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_0 + \lambda_1, 2\lambda_0 + \lambda_1, \dots, (n-4)\lambda_0 + \lambda_1, (n-4)\lambda_0 + 2\lambda_1, (n-5)\lambda_0 + 2\lambda_1),$$

$$(b) \mathfrak{g} = \mathfrak{H}_{n,r}^t(\alpha_1, \dots, \alpha_{t-1}), \quad 2 \leq k \leq n-5, \quad t = \lfloor \frac{n-k-1}{2} \rfloor$$

$$\begin{aligned} [Y_0, Y_i] &= Y_{i+1}, & i &= 1, \dots, n-4 \\ [Y_0, Y_{n-1}] &= Y_{n-2}, \\ [Y_i, Y_{n-3-i}] &= (-1)^{i-1} Y_{n-1}, & i &= 1, \dots, \frac{n-4}{2} \\ [Y_i, Y_{n-2-i}] &= (-1)^{i-1} \frac{n-2-2i}{2} Y_{n-2}, & i &= 1, \dots, \frac{n-4}{2} \\ [Y_i, Y_{i+1}] &= \alpha_i Y_{2i+k}, & i &= 1, \dots, t-1 \\ [Y_i, Y_j] &= a_{i,j} Y_{i+j+k-1}, & 1 \leq i < j < n-2, i+j &\leq n-k-2 \end{aligned}$$

$$f \sim \text{diag}(\lambda_0, k\lambda_0, (1+k)\lambda_0, (2+k)\lambda_0, \dots, (n-4+k)\lambda_0, (n-4+2k)\lambda_0, (n-5+2k)\lambda_0),$$

7. Si $\text{grg} \simeq \mathfrak{E}_{9,5}^1$ alors $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{E}_{9,5}^1$ et $\text{ty}(\mathfrak{g}) = 2$

$$\begin{aligned} [Y_0, Y_i] &= Y_{i+1}, & i &= 1, \dots, 4, & [Y_0, Y_8] &= Y_6, & [Y_1, Y_4] &= Y_8, & [Y_1, Y_5] &= 2Y_6, \\ [Y_1, Y_6] &= 3Y_7, & [Y_2, Y_3] &= -Y_8, & [Y_2, Y_4] &= -Y_6, & [Y_2, Y_8] &= -3Y_7, \end{aligned}$$

$$f \sim \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_0 + \lambda_1, 2\lambda_0 + \lambda_1, 3\lambda_0 + \lambda_1, 4\lambda_0 + \lambda_1, 4\lambda_0 + 2\lambda_1, 4\lambda_0 + 3\lambda_1, 3\lambda_0 + 2\lambda_1),$$

8. Si $\text{grg} \simeq \mathfrak{E}_{9,5}^2$ alors $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{E}_{9,5}^2$ et $\text{ty}(\mathfrak{g}) = 2$

$$\begin{aligned} [Y_0, Y_i] &= Y_{i+1}, & i &= 1, \dots, 6, & [Y_0, Y_8] &= Y_6, \\ [Y_1, Y_4] &= Y_8, & [Y_1, Y_5] &= 2Y_6, & [Y_1, Y_6] &= Y_7, \\ [Y_2, Y_3] &= -Y_8, & [Y_2, Y_4] &= -Y_6, & [Y_2, Y_5] &= Y_7, \\ [Y_2, Y_8] &= -Y_7, & [Y_3, Y_4] &= -2Y_7, \end{aligned}$$

$$f \sim \text{diag}(\lambda_0, \lambda_0, 2\lambda_0, 3\lambda_0, 4\lambda_0, 5\lambda_0, 6\lambda_0, 7\lambda_0, 5\lambda_0),$$

9. Si $\text{grg} \simeq \mathfrak{E}_{9,5}^3$ alors $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{E}_{9,5}^3$ et $\text{ty}(\mathfrak{g}) = 2$

$$\begin{aligned} [Y_0, Y_i] &= Y_{i+1}, & i &= 1, \dots, 4, & [Y_0, Y_6] &= Y_7, & [Y_0, Y_8] &= Y_6, \\ [Y_1, Y_4] &= Y_8, & [Y_1, Y_5] &= 2Y_6, & [Y_1, Y_6] &= Y_7, \\ [Y_2, Y_3] &= -Y_8, & [Y_2, Y_4] &= -Y_6, & [Y_2, Y_5] &= 2Y_7, \\ [Y_3, Y_4] &= -3Y_7, \end{aligned}$$

$$f \sim \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_0 + \lambda_1, 2\lambda_0 + \lambda_1, 3\lambda_0 + \lambda_1, 4\lambda_0 + \lambda_1, 4\lambda_0 + 2\lambda_1, 5\lambda_0 + 2\lambda_1, 3\lambda_0 + 2\lambda_1),$$

10. Si $\text{grg} \simeq \mathfrak{E}_{7,3}$ alors $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{E}_{7,3}$ et $\text{ty}(\mathfrak{g}) = 2$

$$\begin{aligned} [Y_0, Y_i] &= Y_{i+1}, & i &= 1, \dots, 4, & [Y_0, Y_6] &= Y_4, \\ [Y_1, Y_2] &= Y_6, & [Y_1, Y_3] &= Y_4, & [Y_1, Y_4] &= Y_5, \\ [Y_2, Y_6] &= -Y_5, \end{aligned}$$

$$f \sim \text{diag}(\lambda_0, \lambda_0, 2\lambda_0, 3\lambda_0, 4\lambda_0, 5\lambda_0, 3\lambda_0).$$

Les paramètres $(\alpha_1, \dots, \alpha_{t-1})$ vérifient les relations polynomiales découlant des identités de Jacobi et les constantes $a_{i,j}$ vérifient le système :

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= 0, \\ a_{i,i+1} &= \alpha_i, \\ a_{i,j} &= a_{i+1,j} + a_{i,j+1}. \end{aligned}$$

Dans la démonstration du théorème, on souligne les cas où grg est isomorphe à $L_{n-1} \oplus \mathbb{C}$ et à $\text{grg} \simeq \mathfrak{L}_{n,r}$, pour les autres cas la méthode est analogue.

Démonstration. Supposons que \mathfrak{g} est de la forme t_1 , alors son algèbre graduée est isomorphe à $\mathfrak{L}_{n-1} \oplus \mathbb{C}$ ou bien à $\mathfrak{Q}_{n-1} \oplus \mathbb{C}$.

Soit f une dérivation diagonale de \mathfrak{g} et considérons $\{X_0, X_1, \dots, X_{n-1}\}$ une base adaptée de \mathfrak{g} . On peut trouver trois vecteurs propres de f , notés Y_0, Y_1, Y_{n-1} , n'appartenant pas à l'algèbre dérivée et tels que :

$$\begin{aligned} Y_{n-1} &= c_{n-1}X_{n-1} + c_0X_0 + c_1X_1 + \sum_{i=2}^{n-2} c_iX_i, \\ Y_0 &= a_{n-1}X_{n-1} + a_0X_0 + a_1X_1 + \sum_{i=2}^{n-2} a_iX_i, \\ Y_1 &= b_{n-1}X_{n-1} + b_0X_0 + b_1X_1 + \sum_{i=2}^{n-2} b_iX_i, \end{aligned}$$

avec

$$\det \begin{pmatrix} c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ c_0 & a_0 & b_0 \\ c_1 & a_1 & b_1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

On peut alors choisir Y_0 et Y_1 de façon que $\Delta = \det \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}$ soit non nul.

Quand grg est isomorphe à $\mathfrak{L}_{n-1} \oplus \mathbb{C}$, on pose :

$$Y_{i+1} = [Y_0, Y_i] = (a_0b_1 - a_1b_0)X_{i+1} + \sum_{k=i+2}^{n-2} \gamma_{i+1}^k X_k, \quad i = 1, \dots, n-3$$

On en déduit que $\{Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}\}$ est une base de vecteurs propres de f . Si $\lambda_{n-1}, \lambda_0, \lambda_1$ sont les valeurs propres de f associées respectivement aux vecteurs propres Y_{n-1}, Y_0, Y_1 , alors Y_i est un vecteur propre de f ayant comme valeur propre $(i-1)\lambda_0 + \lambda_1$ pour $i = 1, \dots, n-2$.

La matrice de changement de variables de la base adaptée $\{X_{n-1}, X_0, X_1, \dots, X_{n-2}\}$ à la base de vecteurs propres de f , $\{Y_{n-1}, Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-2}\}$, est la suivante :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} & & & \\ c_0 & a_0 & b_0 & & & \\ c_1 & a_1 & b_1 & & & \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \Delta & & \\ & & & \vdots & \ddots & \\ & & & & & \Delta \end{array} \right)$$

On remarque que le déterminant de cette matrice est non nul et on calcule les crochets restants dans la base de vecteurs propres $\{Y_{n-1}, Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-2}\}$.

Comme $[Y_0, Y_{n-1}] \in \mathfrak{g}_3$ et f est une dérivation, on peut supposer que $[Y_0, Y_{n-1}] = 0$ en faisant, si nécessaire, un changement de variables sur Y_{n-1} . Par ailleurs, $[Y_1, Y_{n-1}]$ appartient aussi à \mathfrak{g}_3 alors :

$$[Y_1, Y_{n-1}] = \sum_{i=3}^{n-2} d^i Y_i$$

En imposant que f est une dérivation, on obtient que :

$$[(i-1)\lambda_0 - \lambda_{n-1}]d^i = 0 \quad i = 3, \dots, n-2$$

Si on considère en plus les conditions de Jacobi on trouve les cas suivants :

a) Lorsque $\lambda_{n-1} = l\lambda_0$ pour un certain $l \in \{2, \dots, n-3\}$, on obtient :

$$\begin{aligned} [Y_j, Y_{n-1}] &= Y_{l+j-2}, & 1 \leq j \leq n-l, \\ [Y_j, Y_{n-1}] &= 0, & n-l+1 \leq j \leq n-2. \end{aligned}$$

b) Si la condition antérieure ne se vérifie pas on trouve que :

$$[Y_j, Y_{n-1}] = 0, \quad 1 \leq j \leq n-2.$$

Dans ce dernier cas \mathfrak{g} est de la forme $\mathfrak{g}' \oplus \mathbb{C}$ où $gr(\mathfrak{g}')$ est isomorphe à L_{n-1} puis, en utilisant des arguments similaires, on déduit que \mathfrak{g}' est isomorphe à L_{n-1} ou bien elle est du type A_{n-1}^k . Par contre, dans le premier cas on obtient que \mathfrak{g} est l'une des formes $L_{n-1} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{C}$ ou $A_{n-1}^k(\alpha_1, \dots, \alpha_{t-1}) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{C}$, précisées dans l'énoncé du théorème.

Quand $gr\mathfrak{g}$ est isomorphe à $\mathfrak{Q}_{n-1} \oplus \mathbb{C}$, le même changement de variables et une démonstration analogue nous permettent de déduire les résultats.

Supposons maintenant que \mathfrak{g} est de la forme t_r avec $r \in \{3, \dots, n-2\}$. Si f est une dérivation diagonale de \mathfrak{g} et $\{X_0, X_1, \dots, X_{n-1}\}$ une base adaptée alors on peut trouver deux vecteurs propres de f , dénotés par Y_0 et Y_1 , qui n'appartiennent pas à l'algèbre dérivée et vérifiant :

$$\begin{aligned} Y_0 &= a_0 X_0 + a_1 X_1 + \sum_{i=2}^{n-1} a_i X_i, \\ Y_1 &= b_0 X_0 + b_1 X_1 + \sum_{i=2}^{n-1} b_i X_i, \end{aligned}$$

avec

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

On peut supposer que $a_0 = 1$.

Quand $gr\mathfrak{g}$ est isomorphe à $\mathfrak{L}_{n,r}$, on pose :

$$\begin{aligned} Y_{i+1} &= [Y_0, Y_i] \quad i = 1, \dots, n-3 \\ Y_{n-1} &= [Y_1, Y_{r-1}] \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned}
Y_i &= \Delta X_i + \sum_{k=i+1}^{n-1} \gamma_i^k X_k, \quad i = 2, \dots, r-1, \\
Y_i &= \Delta X_i + \sum_{k=i+1}^{n-2} \gamma_i^k X_k, \quad i = r+1, \dots, n-2, \\
Y_r &= \Delta(X_r + a_1 X_{n-1}) + \sum_{k=r+1}^{n-2} \gamma_r^k X_k, \\
Y_{n-1} &= \Delta(b_0 X_r + b_1 X_{n-1}) + \sum_{k=r+1}^{n-2} \gamma_r^k X_k.
\end{aligned}$$

La matrice de changement de la base de $\{X_0, X_1, \dots, X_{r-1}, X_r, X_{n-1}, X_{r+1}, \dots, X_{n-2}\}$ à la base $\{Y_0, Y_1, \dots, Y_{r-1}, Y_r, Y_{n-1}, Y_{r+1}, \dots, Y_{n-2}\}$ est la suivante :

$$\begin{pmatrix}
1 & b_0 & & & & & & & \\
a_1 & b_1 & & & & & & & 0 \\
\vdots & \vdots & \Delta & & & & & & \\
& & \vdots & \ddots & & & & & \\
& & & & \Delta & \Delta b_0 & & & \\
& & & & \Delta a_1 & \Delta b_1 & & & \\
& & & & \vdots & \vdots & \Delta & & \\
& & & & & & \vdots & \ddots & \\
& & & & & & & & \Delta
\end{pmatrix}$$

$\{Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}\}$ est une base de vecteurs propres de f , si λ_0 et λ_1 représentent respectivement les valeurs propres associées aux vecteurs Y_0 et Y_1 alors, dans cette base, f est de la forme :

$$f \sim \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_0 + \lambda_1, 2\lambda_0 + \lambda_1, \dots, (n-3)\lambda_0 + \lambda_1, (r-2)\lambda_0 + 2\lambda_1)$$

On calcule les crochets dans cette nouvelle base :

$$[Y_0, Y_{n-2}] = 0,$$

$$[Y_0, Y_{n-1}] = \begin{cases} \Delta b_0 Y_{r+1} + \sum_{k=2}^{n-2} c_k Y_{r+k} & \text{si } r \neq n-2 \\ 0 & \text{si } r = n-2 \end{cases}.$$

Si $r \neq n-2$, on impose que f est une dérivation :

$$f([Y_0, Y_{n-1}]) = [(r-1)\lambda_0 + 2\lambda_1][Y_0, Y_{n-1}] \Rightarrow \begin{cases} b_0(\lambda_1 - \lambda_0) = 0 \\ c_k(\lambda_1 - k\lambda_0) = 0 \quad \text{pour } k = 2, \dots, n-r-2 \end{cases}$$

Si $2 \leq i \leq r-1$:

$$[Y_1, Y_i] = b_0 Y_{i+1} + \sum_{k=2}^{n-i-1} d_k Y_{i+k} \Rightarrow \begin{cases} b_0(\lambda_1 - \lambda_0) = 0 \\ d_k(\lambda_1 - k\lambda_0) = 0 \quad \text{pour } k = 2, \dots, n-i-2 \\ d_{n-i-1}\lambda_0 = 0 \end{cases}$$

Si $r \leq i \leq n-3$:

$$\begin{aligned} [Y_1, Y_i] &= b_0 Y_{i+1} + \sum_{k=2}^{n-i-2} d_k Y_{i+k} \Rightarrow \begin{cases} b_0(\lambda_1 - \lambda_0) = 0 \\ d_k(\lambda_1 - k\lambda_0) = 0 \end{cases} \text{ pour } k = 2, \dots, n-i-2 \\ [Y_1, Y_{n-2}] &= 0 \\ [Y_1, Y_{n-1}] &= b_0^2 Y_{r+1} + \sum_{l=3}^{n-r-1} e_l Y_{l+r-1} \Rightarrow \begin{cases} b_0(\lambda_1 - \lambda_0) = 0 \\ d_l(2\lambda_1 - l\lambda_0) = 0 \end{cases} \text{ pour } l = 3, \dots, n-r-1 \end{aligned}$$

Si $2 \leq i \leq \frac{r-1}{2}$:

$$[Y_i, Y_{r-i}] = (-1)^{i-1} (Y_{n-1} - b_0 Y_r) + \sum_{k=2}^{n-r-1} g_k Y_{r+k-1} \Rightarrow \begin{cases} b_0(\lambda_1 - \lambda_0) = 0 \\ g_k(\lambda_1 - k\lambda_0) = 0 \end{cases} \text{ pour } k = 2, \dots, n-r-1$$

Si $1 < i < j < n-1$ et $i+j \leq r-1$:

$$[Y_i, Y_j] = \sum_{k=2}^{n-i-j} h_k Y_{k+i+j-1} \Rightarrow \begin{cases} h_k(\lambda_1 - k\lambda_0) = 0 \text{ pour } k = 2, \dots, n-i-j-1 \\ h_{n-i-j}\lambda_0 = 0 \end{cases}$$

Si $1 < i < j < n-1$ et $i+j \geq r+1$:

$$[Y_i, Y_j] = \sum_{k=2}^{n-i-j-1} h_k Y_{k+i+j-1} \Rightarrow h_k(\lambda_1 - k\lambda_0) = 0 \text{ pour } k = 2, \dots, n-i-j-1$$

Si $1 < i < n-1$:

$$[Y_i, Y_{n-1}] = \sum_{l=3}^{n-i-r} p_l Y_{l+i+r-2} \Rightarrow p_l(2\lambda_1 - l\lambda_0) = 0 \text{ pour } l = 3, \dots, n-i-r$$

Ces calculs nous font envisager différentes possibilités, en considérant, en plus, les conditions de Jacobi.

1. Si $\lambda_1 = \lambda_0$, il suffit de faire le changement de variables $Y_1 \rightarrow Y_1 - b_0 Y_0, Y_{n-1} \rightarrow Y_{n-1} - b_0 Y_r$ pour trouver l'algèbre $\mathfrak{L}_{n,r}$.
2. Si $\lambda_0 = 0$, on peut supposer $\lambda_1 = 1$ et il existe un changement de variables avec lequel on obtient l'algèbre $\mathfrak{L}_{n,r}$.
3. Si $\lambda_1 = k\lambda_0$ avec $2 \leq k \leq n-4$, on obtient une algèbre du type $\mathfrak{E}_{n,r}^t(\alpha_1, \dots, \alpha_{t-1})$ où $t = \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor$.
4. Si $2\lambda_1 = (2k+1)\lambda_0$ avec $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-r-2}{2} \rfloor$, on obtient une algèbre du type $\mathfrak{g} = \mathfrak{D}_{n,r}^t$.

Dans le reste des cas, le même changement de variables nous permet d'obtenir les familles d'algèbres décrites dans le théorème 15.

Remarque. Sauf isomorphisme, il y a seulement deux algèbres quasi-filiformes de rang 3, respectivement isomorphes à $\mathfrak{L}_{n-1} \oplus \mathbb{C}$ et à $\mathfrak{Q}_{n-1} \oplus \mathbb{C}$.

Les algèbres quasi-filiformes de rang 2 sont $\mathfrak{L}_{n,r}, \mathfrak{Q}_{n,r}, \mathfrak{T}_{n,n-4}, \mathfrak{T}_{n,n-3}, \mathfrak{E}_{9,5}^1, \mathfrak{E}_{9,5}^3$ ou bien de la forme 1b, 1c, 2b, 2c, 2f, 2g d'après la terminologie du théorème 15.

Les algèbres quasi-filiformes de rang 1 sont $\mathfrak{E}_{9,5}^2, \mathfrak{E}_{7,3}^2$ ou bien correspondent à l'une des algèbres du type 1d, 2d, 2e, 3b, 3c, 4b, 4c, 5b, 6b décrites dans le théorème 15.

Chapitre 8

Sur les algèbres de Lie quasi-filiformes complétables

8.1 Introduction

La complétude d'une algèbre de Lie, étant une propriété déduite de la structure des dérivations, constitue un invariant d'intérêt pour l'étude du comportement d'une classe d'isomorphismes par rapport aux déformations et contractions. Bien que la notion d'algèbre de Lie complète eût été introduite en 1951 dans le contexte de la théorie d'algèbres sous-invariantes de Schenckman [47], Jacobson fut le premier à donner une définition formelle dans les années 60, en utilisant des outils cohomologiques.

Par la suite, de nombreux auteurs se sont intéressés à l'étude des algèbres de Lie complètes. Favre a étudié les algèbres de Lie complètes par rapport à leur nilradical [25], tandis que Carles a analysé la suite croissante des algèbres de Lie de dérivations [18]. Plus récemment, Zhu et Meng ont étudié la complétude des algèbres de Lie résolubles de rang maximal [52] et non-maximal [53].

Définition 20 Une algèbre de Lie \mathfrak{g} est dite complète si

1. le centre de \mathfrak{g} est nul, $Z(\mathfrak{g}) = \{0\}$
2. toutes ses dérivations sont intérieures, c'est-à-dire, $Der(\mathfrak{g}) = ad(\mathfrak{g})$.

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie et $H^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ son n -ième groupe de cohomologie. Rappelons que $H^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{g})$. De plus, l'ensemble des cocycles $Z^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ correspond à l'ensemble des dérivations de \mathfrak{g} et l'ensemble des cobords $B^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ correspond à l'ensemble des dérivations intérieures. On en déduit que l'algèbre de Lie \mathfrak{g} est complète si et seulement si $H^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \{0\}$.

L'étude du deuxième groupe de cohomologie est liée à celle des déformations. Si l'algèbre de Lie \mathfrak{g} est donnée par les crochets $[\cdot, \cdot]$, une déformation formelle de \mathfrak{g} est définie par la série formelle :

$$\phi_t(X, Y) = [X, Y]_t = F_0(X, Y) + F_1(X, Y)t + \dots, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

avec $F_0(X, Y) = [X, Y]$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$.

En imposant la condition de Jacobi sur $[\cdot, \cdot]_t$, on en déduit que $F_1 \in Z^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$. Ainsi, à chaque déformation on peut faire correspondre un 2-cocycle. Les déformations infinitésimales sont celles qui vérifient la condition de Jacobi jusqu'au premier ordre et s'identifient aux éléments de $Z^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$.

Par ailleurs, on dit que deux déformations ϕ_t et ϕ'_t de \mathfrak{g} sont équivalentes s'il existe une série formelle $g(t) = \sum_{p=0}^{\infty} G_p t^p$ avec $G_p \in GL(n, \mathbb{C})$ telle que

$$\phi_t(X, Y) = (g(t)\phi'_t)(g(t)^{-1}X, g(t)^{-1}Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Si deux déformations sont équivalentes alors les 2-cocycles correspondants sont égaux modulo $B^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$, la réciproque étant vraie aussi pour les déformations linéaires [44].

Soit \mathfrak{n} une algèbre de Lie nilpotente de dimension finie sur \mathbb{C} et $Der(\mathfrak{n})$ son algèbre de dérivations. Un tore \mathfrak{t} sur \mathfrak{n} est une sous-algèbre commutative de $Der(\mathfrak{n})$ formée par des endomorphismes semi-simples. Il est clair que \mathfrak{n} se décompose de la façon suivante

$$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{t}^*} \mathfrak{n}_{\alpha}$$

où \mathfrak{t}^* représente l'espace dual de \mathfrak{t} et $\mathfrak{n}_{\alpha} = \{X \in \mathfrak{n} \mid [f, X] = \alpha(f)X, \quad \forall f \in \mathfrak{t}\}$. Lorsque \mathfrak{t} est un tore maximal par rapport à l'inclusion, l'ensemble $\Delta = \{\alpha \in \mathfrak{t}^* \mid \mathfrak{n}_{\alpha} \neq 0\}$ est un système de poids de \mathfrak{n} [24]. Si \mathfrak{t} et \mathfrak{t}' sont deux tores maximaux, ils sont conjugués par automorphismes, c'est-à-dire, il existe un automorphisme $\theta \in Aut(\mathfrak{n})$ tel que $\theta\mathfrak{t}\theta^{-1} = \mathfrak{t}'$. Le rang d'un tore maximal est donc un invariant de \mathfrak{n} que l'on appelle le rang de \mathfrak{n} . Par ailleurs, le type de \mathfrak{n} , noté par $ty(\mathfrak{n})$, est la dimension du quotient $H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) = \mathfrak{n}/[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$. On montre que le rang de \mathfrak{n} est toujours majoré par son type [24]. L'algèbre de Lie \mathfrak{n} est de rang maximal si le rang et le type sont égaux.

Soit \mathfrak{t} un tore maximal, on définit $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}$ comme :

$$[f_1 + x_1, f_2 + x_2] = f_1(x_2) - f_2(x_1) + [x_1, x_2] \quad \forall f_1, f_2 \in \mathfrak{t}, \forall x_1, x_2 \in \mathfrak{n}$$

L'algèbre de Lie \mathfrak{g} est alors résoluble et \mathfrak{t} est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} . On dira que le rang de \mathfrak{g} est celui de \mathfrak{n} et que \mathfrak{g} est de rang maximal si \mathfrak{n} l'est aussi.

Théorème 16 [52] *Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie résoluble complète, elle se décompose de la façon $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$, \mathfrak{n} étant le nilradical et \mathfrak{h} une sous-algèbre isomorphe à un tore maximal de \mathfrak{n} . De plus, \mathfrak{h} est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} .*

Définition 21 *Une algèbre de Lie nilpotente \mathfrak{n} est complétable lorsque la somme semi-directe $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$, \mathfrak{h} étant un tore maximal de \mathfrak{n} , est complète.*

Les algèbres nilpotentes les plus étudiées sont les filiformes.

8.2 Algèbres de Lie quasi-filiformes complétables

De la classification des algèbres de Lie quasi-filiformes de rang non nul du théorème 15, on obtient celles qui sont de rang maximal.

Corollaire 6 *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie quasi-filiforme de rang non nul. L'algèbre \mathfrak{g} est de rang maximal si et seulement si elle est isomorphe à l'une des algèbres suivantes : $\mathfrak{g} = L_{n-1} \oplus \mathbb{C}$, $\mathfrak{g} = Q_{n-1} \oplus \mathbb{C}$, $\mathfrak{L}_{n,r}$, $\mathfrak{Q}_{n,r}$, $\mathfrak{T}_{n,n-4}$, $\mathfrak{T}_{n,n-3}$, $\mathfrak{E}_{9,5}^1$ ou bien $\mathfrak{E}_{9,5}^3$.*

Les deux théorèmes ci-dessous nous donnent des conditions suffisantes pour la complétude d'une algèbre de Lie.

Théorème 17 Soit \mathfrak{n} une algèbre de Lie nilpotente de rang maximal et \mathfrak{h} un tore maximal de \mathfrak{n} . Alors l'algèbre $\mathfrak{g} = \overrightarrow{\mathfrak{h}} \oplus \mathfrak{n}$ est complète.

Théorème 18 Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie et \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan qui vérifient les conditions suivantes :

1. \mathfrak{h} est abélienne.
2. \mathfrak{g} se décompose de la façon $\mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$ avec $\Delta \subset \mathfrak{h}^* - \{0\}$.
3. Il existe un système de générateurs $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subseteq \Delta$ de \mathfrak{h}^* tel que $\dim \mathfrak{g}_{\alpha_j} = 1$ pour $1 \leq j \leq l$.
4. Soit $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ une base de \mathfrak{h}^* . Pour $r+1 \leq s \leq l$, on a :

$$\alpha_s = \sum_{i=1}^t k_{is} \alpha_{j_i} - \sum_{i=1+t}^r k_{is} \alpha_{j_i}$$

où $k_{is} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, (j_1, \dots, j_r) est une permutation de $(1, \dots, r)$, et il existe une formule

$$\begin{aligned} & \underbrace{[x_{j_1}, \dots, x_{j_1}]}_{k_{1s}} \underbrace{[x_{j_t}, \dots, x_{j_t}]}_{k_{ts}}, \dots, x_{k_m} \\ = & \underbrace{[x_{j_t+1}, \dots, x_{j_t+1}]}_{k_{t+1s}} \underbrace{[x_{j_r}, \dots, x_{j_r}]}_{k_{rs}}, x_s, x_{k_1}, \dots, x_{k_m} \end{aligned}$$

l'ordre de calcul des crochets n'ayant pas d'importance, $0 \neq x_j \in \mathfrak{g}_{\alpha_j}$ et $m \neq 0$ si $t = r$.

Alors \mathfrak{g} est une algèbre de Lie complète.

Ces théorèmes sont démontrés dans les articles [52] et [53].

Théorème 19 Toute algèbre de Lie quasi-filiforme de rang non nul est complétable.

Démonstration. Soit \mathfrak{n} une algèbre de Lie quasi-filiforme de rang non nul, elle est donc isomorphe à l'une des algèbres du théorème 15. On considère la somme semi-directe $\mathfrak{g} = \overrightarrow{\mathfrak{h}} \oplus \mathfrak{n}$ où \mathfrak{h} est un tore maximal associé à \mathfrak{n} .

Quand \mathfrak{n} est isomorphe à $\mathfrak{E}_{9,5}^2$ ou bien à $\mathfrak{E}_{7,3}$, par le calcul des deux premiers groupes de cohomologie, on vérifie que \mathfrak{g} est complète et donc \mathfrak{n} est complétable.

Si \mathfrak{n} est isomorphe à $L_{n-1} \oplus \mathbb{C}$, $Q_{n-1} \oplus \mathbb{C}$, $\mathfrak{L}_{n,r}$, $\mathfrak{Q}_{n,r}$, $\mathfrak{T}_{n,n-4}$, $\mathfrak{T}_{n,n-3}$, $\mathfrak{E}_{9,5}^1$ ou bien à $\mathfrak{E}_{9,5}^3$, \mathfrak{n} est de rang maximal et d'après le théorème 17, \mathfrak{g} est complète.

Si $\mathfrak{n} \simeq A_{n-1}^k(\alpha_1, \dots, \alpha_{t-1}) \oplus \mathbb{C}$, \mathfrak{g} se décompose alors en somme directe $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, où $\mathfrak{g}_1 = A_{n-1}^k(\alpha_1, \dots, \alpha_{t-1}) \overrightarrow{\oplus} \mathfrak{t}$, \mathfrak{t} étant un tore maximal de $A_{n-1}^k(\alpha_1, \dots, \alpha_{t-1})$ et \mathfrak{g}_2 l'algèbre non-abélienne de dimension 2. Dans [3], on démontre que \mathfrak{g}_1 est complète et comme $H^0(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2) = H^1(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2) = 0$, il en résulte que \mathfrak{g} est complète.

De façon analogue, on prouve la complétude de \mathfrak{g} lorsque \mathfrak{n} est isomorphe à $B_{n-1}^k(\alpha_1, \dots, \alpha_{t-1}) \oplus \mathbb{C}$.

Si $\mathfrak{n} \simeq \mathfrak{D}_{n,r}^t$, $\Delta = \{\alpha_0 = 2\lambda_0, (\alpha_j = (2k + 2j - 1)\lambda_0)_{1 \leq j \leq n-2}, \alpha_{n-1} = 2(r-1+2k)\lambda_0\}$ est un système de poids de \mathfrak{n} . Les deux premières conditions du théorème 18 se vérifient et d'après le lemme 2.3 de [53]

$$Der(\mathfrak{g}) = D_0 + ad(\mathfrak{g})$$

où $D_0 = \{\phi \in Der(\mathfrak{g}) / \phi(h) = 0 \forall h \in \mathfrak{h}\}$. Pour prouver que \mathfrak{g} est complète, il suffit de voir que $D_0 \subseteq ad(\mathfrak{g})$. Soit $D \in D_0$, pour tout $X_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$ ($0 \leq i \leq n-1$) et $h \in \mathfrak{h}$, on a :

$$[h, D(X_i)] = [h, D(X_i)] + [D(h), X_i] = D([h, X_i]) = \alpha_i(h)D(X_i).$$

Comme $\dim \mathfrak{g}_{\alpha_i} = 1$, $D(Y_i) = d_i Y_i$ pour $0 \leq i \leq n-1$. A partir des crochets

$$\begin{aligned} [Y_0, Y_i] &= Y_{i+1}, & i &= 1, \dots, n-3 \\ [Y_1, Y_{n-1}] &= Y_{2k+r}, & [Y_1, Y_{r-1}] &= Y_{n-1}, \end{aligned}$$

on obtient les relations

$$d_i = d_0 + (i-1)d_1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n-2\}, \quad d_{n-1} = (2k+r-1)d_0, \quad 2d_1 = (2k+1)d_0.$$

On en déduit que D est une dérivation intérieure de \mathfrak{g} . De même, on démontre que \mathfrak{g} est complète lorsque $\mathfrak{n} \simeq \mathfrak{F}_{\mathfrak{n},r}^t$.

Supposons maintenant que $\mathfrak{n} \simeq L_{n-1} \overrightarrow{\oplus}_l \mathbb{C}$, $\Delta = \{\lambda_0, \lambda_1, (j\lambda_0 + \lambda_1)_{0 \leq j \leq n-3}, l\lambda_0\}$ est un système de poids de \mathfrak{n} . Les trois premières conditions du théorème 18 se vérifient clairement, quant à la quatrième, il suffit de remarquer que :

$$\begin{aligned} \overbrace{[Y_0, [Y_0, \dots [Y_0, Y_1]]]}^j &= Y_{j+1} \quad 1 \leq j \leq n-3 \\ \overbrace{[Y_0, [Y_0, \dots [Y_0, Y_i]]]}^l &= Y_{i+l} = [-Y_{n-1}, Y_i] \quad 1 \leq i \leq n-l \end{aligned}$$

Ainsi, le théorème 18 nous donne la complétude de \mathfrak{g} .

Pour les cas restants, on démontre de la même façon que \mathfrak{g} est complète et on en conclut que \mathfrak{n} est complétable.

8.3 Sur le deuxième groupe de cohomologie des algèbres de Lie ayant un nilradical quasi-filiforme

Nous avons vu que pour toute algèbre de Lie quasi-filiforme \mathfrak{n} , l'algèbre $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \overrightarrow{\oplus} \mathfrak{n}$, \mathfrak{h} étant un tore maximal associé à \mathfrak{n} , est complète et donc $H^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \{0\}$. Nous nous demandons ce qu'il en est du deuxième groupe de cohomologie.

Comme dans [3], nous considérons la famille d'algèbres $\mathfrak{n} = A_{n-1}^k(\alpha_1, \dots, \alpha_{t-1}) \oplus \mathbb{C}$ avec $t = \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor$ et $2 \leq k \leq n-4$ définie par

$$\begin{aligned} [Y_0, Y_i] &= Y_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [Y_i, Y_{i+1}] &= \alpha_i Y_{2i+k}, & 1 \leq i \leq t-1, \\ [Y_i, Y_j] &= a_{i,j} Y_{i+j+k-1}, & 1 \leq i < j, \quad i+j \leq n-k-1, \end{aligned}$$

où

$$a_{i,i} = 0, \quad a_{i,i+1} = \alpha_i, \quad a_{i,j} = a_{i+1,j} + a_{i,j+1}. \quad (8.1)$$

Si α_1 est non-nul, on peut prendre $\alpha_1 = 1$ et les paramètres $\alpha_2, \dots, \alpha_{t-1}$ distinguent les classes d'isomorphismes de la famille. Pour chaque $l \in \{2, \dots, t-1\}$, l'algèbre $A_{n-1}^k(1, 0, \dots, \alpha_l, \dots, 0)$ est une déformation linéaire de $A_{n-1}^k(1, 0, \dots, 0)$ qui correspond au 2-cocycle suivant :

$$F_1^l(X_i, X_j) = \gamma_{i,j}^l X_{i+j+k-1}$$

Les coefficients $\gamma_{i,j}^l$ sont donnés par les relations $a_{i,j} = \sum_{l=1}^{t-1} \gamma_{i,j}^l \alpha_l$ qui découlent des équations (8.1).

Toutes ces déformations étant non-équivalentes, on trouve $t-2$ éléments de $Z^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ non-équivalents modulo $B^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ où $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \overrightarrow{\oplus} (A_{n-1}^k(1, 0, \dots, 0) \oplus \mathbb{C})$. On en conclut que $\dim H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \geq t-2$.

Proposition 20 *Pour tout $m \in \mathbb{N}^+$, il existe une algèbre de Lie \mathfrak{g} complète dont le nilradical est quasi-filiforme et telle que $\dim H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \geq m$.*

Chapitre 9

Structures complexes sur les algèbres de Lie quasi-filiformes

9.1 Structures complexes généralisées sur une algèbre de Lie

9.1.1 Définitions et lien avec les Structures Complexes

La notion de structure complexe est définie dans le cadre général des variétés différentiables. Dans ce travail, nous allons nous intéresser essentiellement au cas des structures complexes généralisées invariantes à gauche sur un groupe de Lie. La définition est alors de nature purement algébrique et s'exprime uniquement en termes d'algèbres de Lie. C'est dans ce cadre que nous allons rappeler cette définition.

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie réelle de dimension $2n$. Notons par \mathfrak{g}^* l'espace vectoriel dual qui s'identifie à l'espace des formes différentielles de degré 1 invariantes à gauche sur un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Il existe donc sur \mathfrak{g}^* une notion de différentielle extérieure. Par exemple, si $\alpha \in \mathfrak{g}^*$, alors $d\alpha \in \Lambda^2(\mathfrak{g}^*)$ et est donnée par $d\alpha(X, Y) = -\alpha[X, Y]$ où $[\cdot, \cdot]$ est le crochet de \mathfrak{g} . Sur l'espace vectoriel $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$, on définit une multiplication, appelée crochet de Courant, par :

$$[X + \xi, Y + \eta]_c = [X, Y] + \mathcal{L}_X \eta - \mathcal{L}_Y \xi - \frac{1}{2} d(I_X \eta - I_Y \xi).$$

pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$, $\xi, \eta \in \mathfrak{g}^*$ et $I_X \eta$ désigne le produit intérieur de X sur η . Cette opération est antisymétrique et vérifie l'identité de Jacobi (notons que dans le cadre général des variétés différentiables, ce crochet se définit sur la somme du fibré tangent et du fibré extérieur, mais ce crochet ne vérifie pas nécessairement l'identité de Jacobi). Ainsi $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$, muni du crochet de Courant, est une algèbre de Lie réelle de dimension $4n$. Cette algèbre de Lie est une algèbre de Lie quadratique. En effet il existe aussi un produit scalaire donné par :

$$\langle X + \xi, Y + \eta \rangle = \frac{1}{2} (\xi(Y) + \eta(X)).$$

Définition 22 Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie réelle de dimension paire $2n$. Une structure complexe généralisée sur \mathfrak{g} est un endomorphisme linéaire \mathcal{J} de $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ tel que :

$$1. \mathcal{J}^2 = -Id,$$

2. \mathcal{J} est orthogonal pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, c'est-à-dire :

$$\langle \mathcal{J}(X + \xi), \mathcal{J}(Y + \eta) \rangle = \langle X + \xi, Y + \eta \rangle \quad \forall X, Y \in \chi(M) \quad \forall \xi, \eta \in \chi^*(M),$$

3. Si L est l'espace propre de \mathcal{J} correspondant à la valeur propre $+i$, alors L doit être involutif par rapport au crochet de Courant, c'est-à-dire $[L, L]_c \subset L$.

Remarquons que le produit scalaire est de signature $(2n, 2n)$. La sous-algèbre L de \mathfrak{h} est un espace isotrope puisque

$$\langle X + \xi, Y + \eta \rangle = 0$$

pour tout $X + \xi, Y + \eta \in L$. Comme il est de dimension $2n$, il est maximal isotrope. Considérons sa projection sur \mathfrak{g} . On notera par k la codimension de la projection de L sur \mathfrak{g} . Il est clair que

$$0 \leq k \leq n.$$

Définition 23 Si k est la codimension de la projection de L sur \mathfrak{g} , on dit que la structure complexe généralisée \mathcal{J} est de type k .

Exemples

1. Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie réelle de dimension $2n$ munie d'une structure complexe (classique) que nous noterons J :

$$J : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

et cette application vérifie

$$J^2 = -Id$$

et la condition de Nijenhuis

$$N(J)(X, Y) = 0$$

pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$. Cette structure permet de définir une structure complexe généralisée

$$\mathcal{J}_J : \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$$

en posant

$$\mathcal{J}_J(X + \xi) = -J(X) + J^*(\xi) \quad \forall X \in \mathfrak{g} \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}^*.$$

Il est facile de vérifier que $\mathcal{J}_J^2 = -Id$ et l'orthogonalité de \mathcal{J}_J . Si on note par T_+ et T_- les espaces propres de J associés aux valeurs propres $+i$ et $-i$ alors le $+i$ -espace propre de \mathcal{J}_J est :

$$L = T_- \oplus (T_+)^*$$

On constate que l'involutivité de L par rapport au crochet de Courant est équivalente à ce que T_- soit une sous-algèbre de \mathfrak{g} . Cette structure généralisée est donc de type n .

2. Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie réelle de dimension $2n$ munie d'une forme symplectique ω , c'est-à-dire d'une forme de degré 2 antisymétrique vérifiant

$$\begin{cases} \omega^n = \omega \wedge \omega \cdots \wedge \omega \neq 0 \\ d\omega(X, Y, Z) = \omega([X, Y], Z) + \omega([Y, Z], X) + \omega([Z, X], Y) = 0 \end{cases} \quad (9.1)$$

Une telle forme induit un isomorphisme, toujours noté ω :

$$\omega : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$$

donné par $\omega(X) = I_X \omega$. On définit alors la structure complexe généralisée

$$\mathcal{J}_\omega : \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$$

de la façon suivante :

$$\mathcal{J}_\omega(X + \xi) = \omega(X) + \omega^{-1}(\xi) \quad \forall X \in \mathfrak{g} \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}^*.$$

Il s'agit d'une structure complexe généralisée du type 0 puisque son $+i$ -espace propre est

$$L = \{X - i I_X \omega : X \in \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}\}.$$

Nous avons, ci-dessus, donné les deux cas extrêmes de structures complexes généralisées. En général, d'après [32], toute structure complexe généralisée du type k peut s'écrire comme une somme directe d'une structure complexe de dimension k et d'une structure symplectique de dimension $2n - 2k$. On en déduit que toute structure de type 0 est définie à partir d'une structure complexe sur \mathfrak{g} et que toute structure de type n est donnée par une forme symplectique sur \mathfrak{g} .

9.1.2 Approche Spinorielle

Soit T l'algèbre tensorielle de $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ et I l'idéal engendré par les éléments de la forme $\{X + \xi \otimes X + \xi - \langle X + \xi, X + \xi \rangle.1 : X + \xi \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*\}$. L'espace quotient $C = T/I$ est l'algèbre de Clifford de $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Comme C est une algèbre associative simple, toutes les représentations irréductibles de C sont équivalentes. Par définition, une représentation spinorielle $\phi : C \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(S)$ est une représentation simple de C sur S et l'espace S est appelé l'espace des spineurs. Dorénavant, on considérera $S = \wedge \mathfrak{g}^*$ avec la représentation spinorielle définie par l'action de Clifford suivante :

$$\begin{aligned} \circ : \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^* \times \wedge \mathfrak{g}^* &\rightarrow \wedge \mathfrak{g}^* \\ (X + \xi, \rho) &\mapsto (X + \xi) \circ \rho = i_X \rho + \xi \wedge \rho. \end{aligned}$$

Soit $\rho \in \wedge \mathfrak{g}^*$ un spineur non-nul. On définit l'ensemble $L_\rho \subset \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ par :

$$L_\rho = \{X + \xi \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^* : (X + \xi) \circ \rho = 0\}.$$

On constate que L_ρ est un espace isotrope. On dit que ρ est un spineur pur si L_ρ est maximal isotrope. Réciproquement, si L est un espace maximal isotrope, on peut considérer l'ensemble U_L des spineurs purs ρ tels que $L = L_\rho$. Dans le cas particulier où L est le $+i$ -espace propre d'une structure complexe généralisée, on peut alors prouver que l'ensemble U_L est une droite engendrée par le spineur pur :

$$\rho = \Omega e^{B+i\omega}$$

où B, ω sont des 2-formes réelles et $\Omega = \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_k$, où $\theta_1, \dots, \theta_k$ sont des formes complexes. De plus, on déduit de [21] (proposition III.2.3) que $L \cap \overline{L} = \{0\}$ si et seulement si :

$$\omega^{2n-2k} \wedge \Omega \wedge \overline{\Omega} \neq 0, \quad (9.2)$$

L étant le $+i$ -espace propre de la structure complexe généralisée. Dans [32], on démontre aussi que la condition d'involutivité sur L est équivalente à la condition d'intégrabilité suivante :

$$\exists X + \xi \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^* / d\rho = (X + \xi) \circ \rho. \quad (9.3)$$

9.1.3 Cas des algèbres de Lie nilpotentes

On considère une algèbre de Lie réelle nilpotente de dimension paire \mathfrak{g} . La suite centrale descendante est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^0 &= \mathfrak{g}, \\ \mathfrak{g}^i &= [\mathfrak{g}^{i-1}, \mathfrak{g}].\end{aligned}$$

On note m l'indice de nilpotence de \mathfrak{g} . Dans \mathfrak{g}^* , on considère la suite croissante des sous-espaces V_i où les V_i sont des annulateurs des \mathfrak{g}^i , c'est-à-dire :

$$\begin{cases} V_0 = \{0\} \\ V_i = \{\varphi \in \mathfrak{g}^* \setminus \varphi(X) = 0, \forall X \in \mathfrak{g}^i\}.\end{cases}$$

Il est clair que $V_m = \mathfrak{g}^*$. Notons la définition équivalente

$$V_i = \{\varphi \in \mathfrak{g}^* \setminus I_X d\varphi \in V_{i-1}, \forall X \in \mathfrak{g}\}.$$

Définition 24 Soit α une p -forme sur \mathfrak{g} . Le degré de nilpotence de α , noté par $\text{nil}(\alpha)$, est le plus petit entier i tel que $\alpha \in \wedge^p V_i$.

Supposons que \mathfrak{g} soit munie d'une structure complexe généralisée du type k . On peut ordonner les formes $\{\theta_1, \dots, \theta_k\}$ par leur degré de nilpotence et les choisir de façon que $\{\theta_j : \text{nil}(\theta_j) > i\}$ soient linéairement indépendantes modulo V_i . On montre dans [19] qu'il existe une décomposition $\Omega = \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_k$ telle que :

- a) $\text{nil}(\theta_i) \leq \text{nil}(\theta_j)$ si $i < j$,
- b) pour chaque i , les formes $\{\theta_j : \text{nil}(\theta_j) > i\}$ sont linéairement indépendantes modulo V_i .

Une telle décomposition sera dite appropriée.

Théorème 20 Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie nilpotente munie d'une structure complexe généralisée, le spineur pur ρ correspondant est une forme fermée.

On en déduit

Corollaire 7 Si on choisit une décomposition appropriée pour Ω , alors

- a) $d\theta_i \in \mathcal{I}(\{\theta_j : \text{nil}(\theta_j) < \text{nil}(\theta_i)\})$. En particulier

$$d\theta_i \in \mathcal{I}(\theta_1 \dots \theta_{i-1}).$$

- b) Si $\dim(\frac{V_{j+1}}{V_j}) = 1$ alors, ou bien il existe un θ_i de degré de nilpotence j ou bien il n'en n'existe pas de degré $j + 1$.

Remarque. Supposons qu'il existe un certain $j > 0$ à partir duquel :

$$\dim(\frac{V_{i+1}}{V_i}) = 1 \quad \forall i \geq j;$$

S'il n'y a pas de θ_i de degré $s \geq j$ alors, en utilisant le résultat précédent, on déduit qu'il n'en n'existe pas pour tous les degrés supérieurs à s . Ceci nous permet de donner une majoration des degrés de nilpotence. Du corollaire 7, on déduit $\text{nil}(\theta_1) = 1$. Si $j > 1$, on a alors $\text{nil}(\theta_2) \leq j$. En effet, dans le cas contraire il n'existerait pas de θ_i de degré j et donc de degré supérieur ce qui nous mènerait à une contradiction car $\text{nil}(\theta_2) > j$. Par induction, on peut également démontrer que $\text{nil}(\theta_i) \leq j + i - 2$. Si $j = 1$, par un raisonnement analogue on obtient $\text{nil}(\theta_i) \leq i$.

Théorème 21 Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie réelle nilpotente de dimension $2n$ munie d'une structure complexe généralisée du type $k > 1$. S'il existe un entier $j > 0$ tel que :

$$\dim\left(\frac{V_{i+1}}{V_i}\right) = 1 \quad , \quad \forall i \geq j$$

alors k est majoré par :

$$k \leq \begin{cases} 2n - \text{nil}(\mathfrak{g}) + j - 2 & \text{si } j > 1 \\ 2n - \text{nil}(\mathfrak{g}) & \text{si } j = 1. \end{cases}$$

Démonstration. Supposons $j > 1$. D'après la remarque précédente, $\text{nil}(\theta_k) \leq j + k - 2$. Alors tous les $\theta_1 \dots \theta_k$ appartiennent à V_{j+k-2} . Comme $\Omega \wedge \bar{\Omega} \neq 0$, on a

$$\dim V_{j+k-2} \geq 2k.$$

Par ailleurs, $\dim V_{j+k-2} = 2n - \dim\left(\frac{\mathfrak{g}^*}{V_{j+k-2}}\right)$ et de plus

$$\frac{\mathfrak{g}^*}{V_{j+k-2}} \simeq \frac{V_{\text{nil}(\mathfrak{g})}}{V_{\text{nil}(\mathfrak{g})-1}} \oplus \dots \oplus \frac{V_{j+k-1}}{V_{j+k-2}},$$

donc la dimension de V_{j+k-2} est égale à $2n - \text{nil}(\mathfrak{g}) + j + k - 2$. En remplaçant dans l'inéquation ci-dessus, on obtient finalement :

$$k \leq 2n - \text{nil}(\mathfrak{g}) + j - 2.$$

Pour $j = 1$, on procède de la même façon en prenant $\text{nil}(\theta_k) \leq k$.

Remarque : Application au cas filiforme. Si \mathfrak{g} est filiforme, ce théorème permet de retrouver le résultat de [30]. En effet $m = 2n - 1$, $j = 1$ et donc $k < 2$. Il n'existe donc pas de structure de type n sauf si $n = 1$ mais dans ce cas l'algèbre est abélienne. Nous allons maintenant regarder le cas quasi-filiforme donné par $m = 2n - 2$.

9.2 Etude des structures complexes sur les algèbres quasi-filiformes

9.2.1 Classification des algèbres quasi-filiformes graduées

La proposition suivante nous donne la classification des algèbres de Lie réelles de dimension paire qui sont quasi-filiformes et naturellement graduées.

Proposition 21 Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie quasi-filiforme graduée naturellement de dimension $2n$ et de la forme t_r où $r \in \{1, \dots, 2n - 2\}$. Il existe alors une base homogène $\{X_0, X_1, X_2, \dots, X_{2n-1}\}$ de \mathfrak{g} avec X_0 et X_1 dans W_1 , $X_i \in W_i$ pour $i \in \{2, \dots, 2n - 2\}$ et $X_{2n-1} \in W_r$ dans laquelle \mathfrak{g} est l'une des algèbres décrites ci-dessous.

1. Si \mathfrak{g} est de la forme t_1
 $L_{2n-1} \oplus \mathbb{R} \quad (n \geq 2)$

$$[X_0, X_i] = X_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq 2n - 3.$$

2. Si \mathfrak{g} est de la forme t_r où $r \in \{2, \dots, 2n - 2\}$

(a) $\mathfrak{L}_{2n,r}; \quad n \geq 3, r \text{ impair}, 3 \leq r \leq 2n-3$

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & i &= 1, \dots, 2n-3 \\ [X_i, X_{r-i}] &= (-1)^{i-1} X_{2n-1}, & i &= 1, \dots, \frac{r-1}{2} \end{aligned}$$

(b) $\mathfrak{T}_{2n,2n-3}; \quad n \geq 3$

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & i &= 1, \dots, 2n-4 \\ [X_0, X_{2n-1}] &= X_{2n-2}, \\ [X_i, X_{2n-3-i}] &= (-1)^{i-1} X_{2n-1}, & i &= 1, \dots, n-2 \\ [X_i, X_{2n-2-i}] &= (-1)^{i-1} (n-1-i) X_{2n-2}, & i &= 1, \dots, n-2 \end{aligned}$$

(c) $\mathfrak{N}_{6,3}$

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & i &= 1, 2, 3 \\ [X_1, X_2] &= X_5, \\ [X_1, X_5] &= X_4, \end{aligned}$$

Les crochets non écrits étants nuls, exceptés ceux qui découlent de l'antisymétrie.

Pour obtenir cette classification, il suffit de reprendre celle qui a été faite dans cas complexe [27] et [26]. Par exemple, si \mathfrak{g} est une algèbre quasi-filiforme de la forme t_3 et de dimension 6, il existe une base $\{X_0, X_1, \dots, X_5\}$ telle que

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, \quad i = 1, 2, 3, \\ [X_1, X_3] &= bX_4, \\ [X_1, X_2] &= bX_3 - X_5, \\ [X_5, X_1] &= aX_4. \end{aligned}$$

Quand $a = b = 0$, \mathfrak{g} est isomorphe à l'algèbre $\mathfrak{L}_{6,3}$. Dans le cas contraire, on considère le changement de bases

$$Y_0 = \alpha X_0, Y_1 = \beta X_1 + X_0, Y_2 = \alpha\beta X_2, Y_3 = \alpha^2\beta X_3, Y_4 = \alpha^3\beta X_4, Y_5 = -\alpha\beta^2 X_5$$

$$\text{avec } \beta = \begin{cases} -\frac{1}{b-\sqrt{|a|}} & \text{si } b \neq \sqrt{|a|} \\ -\frac{1}{2\sqrt{|a|}} & \text{si } b = \sqrt{|a|} \end{cases} \text{ et } \alpha = b\beta + 1. \text{ Les crochets sont alors donnés par}$$

$$\begin{aligned} [Y_0, Y_i] &= Y_{i+1}, \quad i = 1, 2, 3, \\ [Y_1, Y_3] &= Y_4, \\ [Y_1, Y_2] &= Y_3 + Y_5, \\ [Y_5, Y_1] &= \delta Y_4, \quad \delta = \pm 1. \end{aligned}$$

En faisant un deuxième changement de base, on voit que \mathfrak{g} correspond aux algèbres $\mathfrak{T}_{6,3}$ pour $\delta = 1$ et $\mathfrak{N}_{6,3}$ pour $\delta = -1$. Notons que dans le cas complexe, les algèbres $\mathfrak{T}_{6,3}$ et $\mathfrak{N}_{6,3}$ sont isomorphes. Au delà de la dimension 6, le procédé de construction dans le cas complexe donne la classification réelle.

Corollaire 8 *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie quasi-filiforme de dimension $2n$. Il existe une base $\{X_0, X_1, X_2, \dots, X_{2n-1}\}$ de \mathfrak{g} telle que :*

1. Si $\text{grg} \simeq \mathfrak{L}_{2n-1} \oplus \mathbb{R} \quad (n \geq 2)$,

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & 1 \leq i \leq 2n-3, \\ [X_i, X_j] &= \sum_{k=i+j+1}^{2n-2} C_{i,j}^k X_k, & 1 \leq i < j \leq 2n-3-i, \\ [X_i, X_{2n-1}] &= \sum_{k=i+2}^{2n-2} C_{i,2n-1}^k X_k, & 1 \leq i \leq 2n-4, \end{aligned}$$

2. Si $\mathfrak{grg} \simeq \mathfrak{L}_{2n,r}$ $n \geq 3$, r impair, $3 \leq r \leq 2n-3$,

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & i &= 1, \dots, 2n-3 \\ [X_0, X_{2n-1}] &= \sum_{k=r+2}^{2n-2} C_{0,2n-1}^k X_k, \\ [X_i, X_j] &= \sum_{k=i+j+1}^{2n-1} C_{i,j}^k X_k, & 1 \leq i < j \leq r-i-1, \\ [X_i, X_j] &= \sum_{k=i+j+1}^{2n-2} C_{i,j}^k X_k, & 1 \leq i < j \leq 2n-3-i, \ r < i+j, \\ [X_i, X_{2n-1}] &= \sum_{k=r+i+1}^{2n-2} C_{i,2n-1}^k X_k, & 1 \leq i \leq 2n-3-r, \\ [X_1, X_{r-1}] &= X_{2n-1}, \\ [X_i, X_{r-i}] &= (-1)^{(i-1)} X_{2n-1} + \sum_{k=r+1}^{2n-2} C_{i,r-i}^k X_k, & 2 \leq i \leq \frac{r-1}{2}, \end{aligned}$$

3. Si $\mathfrak{grg} \simeq \mathfrak{T}_{2n,2n-3}$ $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & i &= 1, \dots, 2n-4 \\ [X_0, X_{2n-1}] &= X_{2n-2}, \\ [X_i, X_j] &= \sum_{k=i+j+1}^{2n-1} C_{i,j}^k X_k, & 1 \leq i < j \leq 2n-4-i, \\ [X_1, X_{2n-4}] &= X_{2n-1}, \\ [X_i, X_{2n-3-i}] &= (-1)^{(i-1)} X_{2n-1} + C_{i,2n-3-i}^{2n-2} X_{2n-2}, & 2 \leq i \leq n-2, \end{aligned}$$

4. Si $\mathfrak{grg} \simeq \mathfrak{N}_{6,3}$ alors $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{N}_{6,3}$,

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, \quad i = 1, 2, 3 \\ [X_1, X_2] &= X_5, \\ [X_1, X_5] &= X_4. \end{aligned}$$

La base $\{X_0, X_1, X_2, \dots, X_{2n-1}\}$ ainsi définie est appelée base adaptée de \mathfrak{g} .

9.2.2 Structures complexes sur les algèbres de Lie quasi-filiformes

Dans cette partie, nous allons chercher les algèbres de Lie quasi-filiformes qui possèdent une structure complexe et donc une structure complexe généralisée du type $k = n$. Si \mathfrak{g} est de la forme t_1 , le théorème 21 implique $k = n = 2$. L'algèbre \mathfrak{g} est alors isomorphe à $\mathfrak{L}_3 \oplus \mathbb{R}$. On vérifie que cette algèbre admet une structure complexe associée au spineur

$$\Omega = (\omega_0 + i\omega_1) \wedge (\omega_2 + i\omega_3)$$

$\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ étant la base duale de la base homogène $\{X_0, X_1, X_2, X_3\}$ de la proposition 21. Supposons que \mathfrak{g} soit une algèbre quasi-filiforme de la forme t_r avec $r \geq 3$. D'après le théorème 21, $n = k \leq r$.

Lemme 6 *Soit une \mathfrak{g} une algèbre quasi-filiforme de la forme t_r avec $r \geq 3$ admettant une structure complexe généralisée de type k . On peut alors trouver des formes $\theta_1 \dots \theta_k$ associées à la structure complexe généralisée vérifiant l'une des deux conditions :*

$$\text{nil}(\theta_1) = 1, \text{nil}(\theta_2) = r, \text{nil}(\theta_3) = r+1 \dots \text{nil}(\theta_k) = r+k-2$$

ou

$$\text{nil}(\theta_1) = 1, \text{nil}(\theta_2) = r, \text{nil}(\theta_3) = r \dots \text{nil}(\theta_k) = r+k-3$$

Dans ce dernier cas, on a $k < r$.

Démonstration. Considérons une décomposition appropriée $\{\theta_1 \dots \theta_k\}$. On déduit du corollaire (7) que $\text{nil}(\theta_1) = 1$ et $\text{nil}(\theta_2) \in \{1, 2, r\}$. La condition 9.2 impose alors $\text{nil}(\theta_2) = r$ car $\dim V_1 = 2$ et $\dim V_2 = 3$. Le corollaire (7) implique alors :

$$\text{nil}(\theta_{i-1}) \leq \text{nil}(\theta_i) \leq r + i - 2 \quad i = 3, \dots, k$$

Il y a donc deux valeurs possibles pour $\text{nil}(\theta_3)$:

1. $\text{nil}(\theta_3) = r + 1$

Supposons que $\text{nil}(\theta_4) = \text{nil}(\theta_3) = r + 1$, les formes θ_4 et θ_3 appartiennent alors à V_{r+1} et puisqu'elles sont indépendantes modulo V_r , on a $\dim(\frac{V_{r+1}}{V_r}) \geq 2$ où $\dim(\frac{V_{r+1}}{V_r}) = 1$. On en déduit que $\text{nil}(\theta_4) = r + 2$. Ainsi, on peut démontrer que

$$\text{nil}(\theta_i) = r + i - 2, \quad \text{pour } i = 3, \dots, k.$$

2. $\text{nil}(\theta_3) = r$

De façon analogue, on montre que $\text{nil}(\theta_i) = r + i - 3$ pour $i = 3, \dots, k$. Dans ce cas, on remarque que, si $k = r$, le nilindice de θ_r est égal à $2r - 3$ et alors $\dim V_{2r-3} \geq 2r$. Ceci est impossible car $\dim V_{2r-3} = 2r - 1$. Ainsi $k < r$.

Exemple. Considérons une algèbre quasi-filiforme \mathfrak{g} de dimension 6 définie dans la base $\{X_0, X_1, \dots, X_5\}$ par :

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, \quad i = 1, 2, 3, \\ [X_1, X_2] &= X_5, \\ [X_1, X_5] &= \delta X_4, \quad \delta \in \{0, 1, -1\}. \end{aligned}$$

Supposons que \mathfrak{g} admette une structure complexe, on peut lui associer une structure complexe généralisée du type $k = 3$ et un spineur :

$$\Omega = \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3,$$

θ_1, θ_2 et θ_3 étant des formes complexes. Notons que cette algèbre est de la forme t_3 et d'après le lemme précédent les nilindices correspondants sont :

$$\text{nil}(\theta_1) = 1, \text{nil}(\theta_2) = 3, \text{nil}(\theta_3) = 4.$$

Les formes complexes θ_1, θ_2 et θ_3 peuvent donc s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \lambda_0 \omega_0 + \lambda_1 \omega_1, \\ \theta_2 &= \beta_0 \omega_0 + \beta_1 \omega_1 + \beta_2 \omega_2 + \beta_3 \omega_3 + \beta_5 \omega_5, \\ \theta_3 &= \gamma_0 \omega_0 + \gamma_1 \omega_1 + \gamma_2 \omega_2 + \gamma_3 \omega_3 + \gamma_4 \omega_4 + \gamma_5 \omega_5 \end{aligned}$$

où $\lambda_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}$, γ_4 non-nul et β_3, β_5 ne s'annulant pas simultanément. De plus, la condition $\theta_1 \wedge \overline{\theta_1} \neq 0$, est équivalente à ce que la partie imaginaire de $\lambda_0 \overline{\lambda_1}$ soit non-nulle. Le corollaire (7) implique :

$$\begin{cases} \beta_5 \lambda_0 - \beta_3 \lambda_1 &= 0 \\ -\gamma_3 \beta_3 \lambda_1 + \gamma_4 \beta_2 \lambda_1 + \gamma_5 \beta_3 \lambda_0 &= 0 \\ \gamma_4 (\beta_5 \lambda_1 + \delta \beta_3 \lambda_0) &= 0 \\ -\gamma_3 \beta_5 \lambda_1 - \delta \gamma_4 \beta_2 \lambda_0 + \gamma_5 \beta_5 \lambda_0 &= 0 \end{cases}$$

Des première et troisième équations, on déduit :

$$\lambda_1^2 + \delta \lambda_0^2 = 0$$

Pour $\delta = 0$, ceci nous mène à une contradiction avec $\theta_1 \wedge \overline{\theta_1} \neq 0$. Si $\delta = -1$, on obtient $\lambda_1 = \pm\lambda_0$ et comme le spineur est défini à une constante de multiplication près, on peut prendre $\theta_1 = \omega_0 \pm \omega_1$ ce qui contredit aussi $\theta_1 \wedge \overline{\theta_1} \neq 0$. Finalement, quand $\delta = 1$, le spineur $\Omega = (\omega_0 + i\omega_1) \wedge (\omega_3 + i\omega_5) \wedge (\omega_2 + i\omega_4)$ est associé à une structure complexe de \mathfrak{g} . Ainsi l'algèbre de Lie \mathfrak{g} admet une structure complexe si et seulement si $\delta = 1$.

Théorème 22 *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie réelle quasi-filiforme admettant une structure complexe. Elle est alors isomorphe ou bien à l'algèbre de dimension 4, $\mathfrak{L}_3 \oplus \mathbb{R}$, ou bien à l'algèbre de dimension 6, $\mathfrak{n}_{6,3}$.*

Démonstration. Soit \mathfrak{g} une algèbre réelle quasi-filiforme et de dimension $2n$ de la forme t_r où $r \in \{1, 3, \dots, 2n-3\}$. Supposons que \mathfrak{g} possède une structure complexe, on peut lui faire correspondre une structure complexe généralisée du type $k = n$.

Pour $r = 1$, nous avons vu que \mathfrak{g} est isomorphe à $\mathfrak{L}_3 \oplus \mathbb{R}$ et que cette algèbre possède une structure complexe. Dorénavant, on supposera $r \in \{3, \dots, 2n-3\}$. En appliquant le théorème 21 et l'inégalité :

$$\text{nil}(\theta_k) = \text{nil}(\theta_n) \leq \text{nil}(\mathfrak{g})$$

à chacune des possibilités du lemme 6, il en résulte que :

1. Si $\text{nil}(\theta_3) = r + 1$ alors $\text{nil}(\theta_k) = r + k - 2$ et donc :

$$n = k \leq r \leq n \Rightarrow r = n.$$

2. Si $\text{nil}(\theta_3) = r$ alors $\text{nil}(\theta_k) = r + k - 3$ et de plus dans ce cas $k < r$, donc :

$$n = k < r \leq n + 1 \Rightarrow r = n + 1.$$

Par ailleurs, l'algèbre graduée $gr(\mathfrak{g})$ doit être isomorphe à l'une des algèbres de la proposition 21. Ainsi on obtient les cas suivants :

1. $gr(\mathfrak{g}) \sim \mathfrak{L}_{2n,r}$; $n \geq 3$, r impair, $3 \leq r \leq 2n-3$.

- (a) Quand $\text{nil}(\theta_3) = r + 1$ alors $gr(\mathfrak{g}) \sim \mathfrak{L}_{2n,n}$ avec $n \geq 3$ impair.

Notons que pour $n = 3$, on retrouve l'algèbre de l'exemple 9.2.2 avec $\delta = 0$ qui ne possédait pas de structures complexes. Supposons $n > 3$. Si $\{X_0, X_1, \dots, X_{2n-1}\}$ est une base adaptée de \mathfrak{g} , et si $\{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{2n-1}\}$ est la base duale, alors

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \lambda_1^0 \omega_0 + \lambda_1^1 \omega_1, \\ \theta_2 &= \sum_{k=0}^n \lambda_2^k \omega_k + \lambda_2^{2n-1} \omega_{2n-1}. \end{aligned}$$

Comme $\theta_1 \wedge d\theta_2 = 0$, en regroupant les termes $\omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \omega_{n-1}$, $\omega_0 \wedge \omega_2 \wedge \omega_{n-2}$ et $\omega_0 \wedge \omega_3 \wedge \omega_{n-3}$ dans $\theta_1 \wedge d\theta_2$ on déduit que

$$\lambda_2^n = \lambda_2^{2n-1} = 0.$$

Ceci est impossible car $\text{nil}(\theta_2) = n$. Il n'existe pas dans ce cas de structures complexes, sauf si $n = 3$.

- (b) Supposons $\text{nil}(\theta_3) = r$ alors $gr(\mathfrak{g}) \sim \mathfrak{L}_{2n,n+1}$ avec $n \geq 4$ pair. On peut écrire θ_1 et θ_2 de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \lambda_1^0 \omega_0 + \lambda_1^1 \omega_1, \\ \theta_2 &= \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_2^k \omega_k + \lambda_2^{2n-1} \omega_{2n-1}. \end{aligned}$$

où $\{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{2n-1}\}$ est la base duale d'une base adaptée de \mathfrak{g} . Comme $\theta_1 \wedge d\theta_2 = 0$ les coefficients correspondants aux termes $\omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \omega_n$ et $\omega_0 \wedge \omega_2 \wedge \omega_{n-1}$, donnent :

$$\begin{cases} \lambda_1^0 \lambda_2^{2n-1} - \lambda_1^1 \lambda_2^{n+1} = 0 \\ \lambda_1^1 \lambda_2^{2n-1} = 0 \end{cases}$$

Comme $\theta_1 \wedge \overline{\theta_1} \neq 0$, on déduit que $\lambda_2^{n+1} = \lambda_2^{2n-1} = 0$ ce qui contredit $\text{nil}(\theta_2) = n + 1$.

2. $gr(\mathfrak{g}) \sim \mathfrak{T}_{2n, 2n-3}$; $n \geq 3$

- (a) Quand $\text{nil}(\theta_3) = r + 1$ alors $gr(\mathfrak{g}) \sim \mathfrak{T}_{6,3}$. Dans ce cas \mathfrak{g} est isomorphe à l'algèbre de l'exemple 9.2.2 avec $\delta = -1$ qui ne possède pas de structures complexes.
- (b) Quand $\text{nil}(\theta_3) = r$, $gr(\mathfrak{g}) \sim \mathfrak{T}_{8,5}$ et il existe une base adaptée $\{X_0, X_1, \dots, X_7\}$ de \mathfrak{g} dont les crochets vérifient :

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & i &= 1, \dots, 4 \\ [X_0, X_7] &= X_6, \\ [X_1, X_i] &= \sum_{k=i+2}^7 C_{1,i}^k X_k, & i &= 2, 3 \\ [X_1, X_4] &= X_7, \\ [X_1, X_5] &= 2X_6, \\ [X_2, X_4] &= -X_6, \end{aligned}$$

Dans la base duale $\{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_7\}$, on peut écrire θ_1, θ_2 et θ_3 de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \lambda_1^0 \omega_0 + \lambda_1^1 \omega_1, \\ \theta_2 &= \sum_{k=0}^5 \lambda_2^k \omega_k + \lambda_2^7 \omega_7, \\ \theta_3 &= \sum_{k=0}^5 \lambda_3^k \omega_k + \lambda_3^7 \omega_7. \end{aligned}$$

D'après le corollaire 7, $\theta_1 \wedge d\theta_2 = 0$ et $\theta_1 \wedge d\theta_3 = 0$. Ainsi :

$$\begin{cases} \lambda_1^0 \lambda_2^7 - \lambda_1^1 \lambda_2^5 = 0 \\ \lambda_1^0 \lambda_3^7 - \lambda_1^1 \lambda_3^5 = 0 \end{cases}$$

En supposant $\lambda_1^1 = \lambda_2^7 = \lambda_3^7 = 1$, on obtient $\lambda_1^0 = \lambda_2^5 = \lambda_3^5$, ce qui contredit le choix de θ_2 et θ_3 puisqu'ils sont indépendants modulo V_4 .

- 3. $gr(\mathfrak{g}) \sim \mathfrak{n}_{6,3}$. \mathfrak{g} est isomorphe à l'algèbre $\mathfrak{n}_{6,3}$, l'algèbre de l'exemple 9.2.2 avec $\delta = 1$ qui admet une structure complexe.

Dans [46], l'algèbre $\mathfrak{n}_{6,3}$ est définie dans la base $\{X_1, \dots, X_6\}$ par :

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= X_3, & [X_1, X_3] &= X_4, & [X_1, X_4] &= X_6, \\ [X_2, X_3] &= -X_5, & [X_2, X_5] &= -X_6. \end{aligned}$$

Parmi la classification de Salamon, il s'agit de la seule algèbre de Lie de dimension 6, quasi-filiforme qui possède une structure complexe.

9.3 L'algèbre de Lie \mathfrak{n}_6^{10}

Dans l'article [46], on trouve la liste des algèbres de Lie nilpotentes de dimension 6 possédant une structure complexe. Nous avons vérifié que l'algèbre \mathfrak{n}_6^{10} est bien la seule algèbre de Lie quasi-filiforme

qui est dans cette classification. Notre but est maintenant de décrire toutes les structures complexes de cette algèbre.

On dit que deux structures complexes, J_1 et J_2 d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} sont équivalentes s'il existe un automorphisme $\sigma \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ tel que $\sigma J_1 = J_2 \sigma$.

Proposition 22 *L'algèbre \mathfrak{n}_6^{10} ne possède que deux structures complexes non-équivalentes.*

Ce résultat a été démontré par Magnin [36]. Dans la base $\{X_0, X_1, \dots, X_5\}$, on considère les crochets de cette algèbre :

$$\begin{cases} [X_0, X_i] = X_{i+1}, & i = 1, 2, 3, \\ [X_1, X_2] = X_5, \\ [X_1, X_5] = X_4, \end{cases}$$

les deux structures complexes sont alors représentées par la matrice

$$J(\zeta) \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

où $\zeta = \pm 1$.

L'étude des structures de Kähler sur les nilvariétés a été initiée par [22] et fut complétée par [10]. Nous allons nous intéresser à l'existence de ces structures dans ce cas.

Afin d'obtenir toutes les structures symplectiques de l'algèbre \mathfrak{n}_6^{10} , on considère une 2-forme anti-symétrique $\omega = \sum_{0 \leq i < j \leq 5} \lambda_{i,j} \omega_i \wedge \omega_j$, $\{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_5\}$ étant la base duale de $\{X_0, X_1, \dots, X_5\}$. En imposant les conditions (9.1), on déduit que les structures symplectiques de l'algèbre \mathfrak{n}_6^{10} sont données par :

$$\begin{aligned} \omega = & \lambda_{0,1} \omega_0 \wedge \omega_1 + \lambda_{0,2} \omega_0 \wedge \omega_2 + \lambda_{0,3} \omega_0 \wedge \omega_3 + \lambda_{0,4} \omega_0 \wedge \omega_4 + \lambda_{0,5} \omega_0 \wedge \omega_5 \\ & + \lambda_{1,2} \omega_1 \wedge \omega_2 + \lambda_{0,5} \omega_1 \wedge \omega_3 + \lambda_{1,4} \omega_1 \wedge \omega_4 + \lambda_{1,5} \omega_1 \wedge \omega_5 - \lambda_{1,4} \omega_2 \wedge \omega_3 + \lambda_{0,4} \omega_2 \wedge \omega_5 \end{aligned}$$

où

$$\lambda_{0,3} \lambda_{0,4} \lambda_{1,4} + \lambda_{0,4}^2 \lambda_{0,5} + \lambda_{0,4} \lambda_{1,4} \lambda_{1,5} - \lambda_{0,5} \lambda_{1,4}^2 \neq 0. \quad (9.5)$$

Une forme symplectique ω d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} est de Kähler s'il existe une structure complexe J compatible avec ω , c'est-à-dire

$$\omega(JX, JY) = \omega(X, Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Si ω est une structure symplectique compatible avec une structure complexe J_1 et J_1 est équivalente à une deuxième structure complexe J_2 , alors ω est aussi compatible avec J_2 . Ainsi, pour déterminer les structures Kähler de \mathfrak{n}_6^{10} il est suffisant de calculer les formes symplectiques compatibles avec les structures complexes $J(\pm 1)$ de (9.4). On obtient alors la condition suivante

$$\begin{cases} \lambda_{0,2} = \lambda_{0,4} = \lambda_{0,5} = \lambda_{1,2} = \lambda_{1,4} = 0 \\ \lambda_{0,3} = \lambda_{1,5} \end{cases} \quad (9.6)$$

qui contredit (9.5). On en conclut que \mathfrak{n}_6^{10} ne possède pas de structure de Kähler.

Chapitre 10

Conclusions

Dans ce mémoire, nous avons considéré les algèbres de Lie complexes et réelles quasi-filiformes, qui après les filiformes sont celles qui possèdent un nilindice maximal. Les premiers résultats des algèbres filiformes datent des années soixante avec la classification des algèbres filiformes naturellement graduées (dans [51], Vergne a montré que, sauf isomorphismes, il n'existe que deux algèbres de Lie filiformes naturellement graduées de dimension paire $2n$, nommées L_{2n} et Q_{2n} , et une seule en dimension impaire $2n+1$, appelée L_{2n+1}). D'autres auteurs ont, par la suite, continué l'étude des algèbres filiformes depuis des approches complètement différentes : classification d'algèbres [27] [29], existence de structures géométriques [30], étude de certaines propriétés algébriques [3]. Nous avons, dans ce travail, reproduit la théorie qui avait été faite pour les algèbres filiformes aux algèbres quasi-filiformes. Les algèbres filiformes, de par leur structure statique, n'offrent pas une casuistique très riche et ne présentent aucun intérêt dans l'étude des algèbres résolubles. Ceci n'est plus vrai pour les algèbres quasi-filiformes. L'étude de ces algèbres est minutieuse car il faut considérer de nombreuses possibilités. Elle est néanmoins intéressante et nous a permis de découvrir certaines particularités, liées notamment, à la notion de rigidité.

Dans le premier chapitre, nous avons rappelé les rudiments qui ont été utilisés dans ce travail. Les résultats originaux commencent à partir du deuxième chapitre où nous complétons la classification des algèbres de Lie résolubles ayant un nilradical filiforme naturellement gradué. En effet, Šnobl et Winternitz ont entamé ce problème en considérant uniquement l'algèbre filiforme L_{2n} . Ils ont, dans leur article [48], trouvé toutes les extensions résolubles de l'algèbre L_{2n} puis ils ont calculé les invariants des algèbres ainsi obtenues. Nous avons donc procédé de façon analogue avec l'autre algèbre filiforme naturellement graduée Q_{2n} pour démontrer que toute algèbre de Lie indécomposable résoluble ayant comme nilradical Q_{2n} est de dimension $2n+1$ ou bien $2n+2$. En dimension $2n+1$, ces algèbres possèdent un seul invariant tandis que pour l'algèbre de dimension $2n+2$, il n'en existe pas. Nous en déduisons l'existence d'une structure symplectique pour l'algèbre de dimension $2n+2$ et nous avons aussi trouvé des structures de contact associées à certaines des algèbres de dimension $2n+1$. En revanche, les algèbres résolubles dont le nilradical est L_{2n} ne possèdent pas ce type de structures car le nombre d'invariants dépend directement de la dimension. La perte de cette structure est due au fait que la sous-algèbre de Heisenberg de Q_{2n} se contracte sur la sous-algèbre abélienne maximale de L_{2n} .

Dans le troisième chapitre, nous prouvons que toute algèbre complexe indécomposable de dimension

supérieure ou égale à 7 qui possède un nilradical filiforme, est forcément résoluble ¹. Etant donné que toute algèbre filiforme se contracte sur L_n et que $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ est une sous-algèbre de toute algèbre semi-simple, il suffit pour cela de démontrer qu'il n'existe pas d'algèbre du type $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus_R L_n$ où $n > 3$ et R est une représentation non triviale.

Puisque les algèbres filiformes ne présentent aucun intérêt dans l'étude des algèbres résolubles, nous considérons les algèbres quasi-filiformes dont le nilindice est abaissé d'une unité par rapport aux filiformes. Nous avons d'abord classé les algèbres de Lie complexes dont le nilradical est quasi-filiforme naturellement gradué, par des méthodes analogues à celles du deuxième chapitre, en utilisant la liste [27]. Notons que dans cette liste des omissions ont été détectées.

Nous avons dédié un chapitre au cas où le nilradical est l'algèbre de dimension 5, $\mathcal{L}_{5,3}$, qui révèle des particularités intéressantes. En effet, nous trouvons l'algèbre non résoluble $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus_{D_{1/2}+D_{1/2}+D_0} \mathcal{L}_{5,3}$ dont le nilradical est clairement quasi-filiforme, ce qui prouve l'invalidité du résultat démontré dans le deuxième chapitre pour les algèbres quasi-filiformes. Le calcul des invariants pour les algèbres ayant comme nilradical $\mathcal{L}_{5,3}$ est justifié car elle est la seule à posséder un opérateur de Casimir invertible. Par ailleurs, en cherchant les algèbres de Lie réelles dont le nilradical est $\mathcal{L}_{5,3}$, nous obtenons les algèbres $\mathfrak{g}_{5,3}^{7,1}$ et $\mathfrak{g}_{5,3}^{7,2}$. Nous remarquons que ces deux algèbres sont rigides mais qu'elles ne se décomposent pas en somme semi-directe du nilradical et d'un tore extérieur formé d'éléments diagonalisables. Le théorème de décomposabilité de Carles [17] n'est donc plus valable pour les algèbres de Lie réelles. Ceci nous amène à envisager la classification des algèbres de Lie réelles, résolubles et rigides en petite dimension, qui diffère de celle qui a été faite dans le cas complexe [8].

Rappelons que si \mathfrak{g} et \mathfrak{g}' sont respectivement des algèbres de Lie réelles et complexes, \mathfrak{g} est une forme réelle de \mathfrak{g}' lorsque $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est isomorphe à \mathfrak{g}' sur \mathbb{C} . Grâce aux propriétés des algèbres rigides et algébriquement rigides, la classification des algèbres de Lie réelles, résolubles et rigides de dimension inférieure ou égale à 8 s'obtient en cherchant toutes les formes réelles de la liste [8] (les formes réelles qui sont données par les crochets de [8] s'appellent normales). Pour ce faire, nous réduisons ce travail à la recherche des algèbres de Lie réelles rigides de dimension inférieure ou égale à 8 dont la dimension du nilradical est inférieure ou égale à 6. Ceci nous permet de voir que toutes les algèbres nilpotentes de dimension inférieure à 6 [20] sont le nilradical d'une algèbre de Lie rigide.

Nous complétons ce travail par le calcul des invariants des algèbres de Lie réelles, résolubles et rigides de dimension inférieure ou égale à 8, qui avait été fait dans le cas complexe [14].

De la théorie générale de la rigidité dans le cas complexe, nous déduisons que toutes les algèbres de Lie résolubles rigides sont déterminées de façon biunivoque par leur nilradical. Ceci n'est plus vrai pour les algèbres de Lie rigides réelles puisque à chaque algèbre nilpotente, nous pouvons lui faire correspondre plusieurs tores dont les éléments ne sont pas forcément diagonalisables. Ce phénomène nous permet aussi de montrer que les algèbres de Lie résolubles réelles ne sont pas nécessairement complètement résolubles. Dans les chapitres suivants, nous considérons une classe d'algèbres de Lie complexes nilpotentes ayant un tore non nul. Nous rappelons tout d'abord que toute algèbre de Lie filiforme admettant une dérivation diagonale est isomorphe à L_n ou à Q_{2m} lorsque elle est naturellement graduée, et que dans le cas contraire elle appartient aux familles d'algèbres $A_n^k(\alpha_1, \dots, \alpha_{t-1})$ ou $B_{2m}^k(\alpha_1, \dots, \alpha_{t-1})$. Nous généralisons alors ce résultat aux algèbres quasi-filiformes et nous obtenons 25 types d'algèbres. Pour ce faire nous remarquons que, étant donnée une certaine algèbre de Lie quasi-filiforme de rang non nul, son algèbre graduée permet de définir une certaine base adaptée. Ensuite, nous essayons de construire une base de vecteurs propres de la dérivation diagonale qui soit adaptée. Les conditions imposées par l'existence de cette dérivation diagonale déterminent les différentes familles d'algèbres résultantes.

¹En dimension 6, l'algèbre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus_{D_{1/2}+D_0} \mathfrak{h}_1$ est clairement un contre-exemple.

Après avoir calculé cette longue liste, nous nous demandons si les algèbres de Lie résolubles ayant un nilradical quasi-filiforme de rang non nul sont complètes, c'est-à-dire, si leurs groupes de cohomologie de Chevalley d'ordre 0 et 1 sont nuls. Par des arguments utilisés dans [52] et [53], nous prouvons que toute algèbre quasi-filiforme de rang non nul est complétable. Notons que cette affirmation est aussi vraie pour les algèbres filiformes [3]. Par ailleurs, nous démontrons l'existence d'algèbres de Lie complètes ayant un nilradical quasi-filiforme de rang non nul et dont la dimension du groupe de cohomologie d'ordre 2 est aussi grande que nous le souhaitons.

Finalement, nous étudions l'existence de structures complexes sur les algèbres de Lie réelles quasi-filiformes de dimension paire. Notons que M. Goze et E. Remm ont, auparavant, prouvé la non-existence de structures complexes pour les algèbres de Lie filiformes [30]. La géométrie complexe généralisée englobe la géométrie complexe et la géométrie symplectique comme deux cas extrêmes. Les structures complexes généralisées ont été définies par N. Hitchin [33], puis R. Cavalcanti [19] et M. Gualtieri [32] ont développé leur étude. Nous avons vu qu'une structure complexe généralisée est déterminée par un spineur pur vérifiant certaines conditions. Le calcul spinoriel nous permet d'étudier l'existence des structures complexes, en particulier, nous redémontrons le résultat de [30]. Pour les algèbres de Lie réelles quasi-filiformes de dimension paire, nous ne trouvons que deux algèbres en dimension 4 et 6 munies d'une telle structure. Nous voyons de plus qu'elles ne possèdent aucune structure symplectique associée et elles n'admettent donc pas de formes de Kähler.

Dans ce travail, nous avons ainsi complété l'étude des algèbres quasi-filiformes qui avait été faite précédemment pour les algèbres filiformes. Cette étude nous offre une casuistique très riche et présente certaines particularités liées par exemple à la notion de rigidité. Dans ce sens, il reste un problème ouvert : trouver une méthode, analogue à celle des racines dans le cas complexe, qui nous permette de classer les algèbres résolubles, réelles et rigides. Par ailleurs, les cas les plus intéressants n'apparaissent qu'en petites dimensions ce qui nous amènerait à envisager des algèbres ayant un nilindice plus petit.

Introducción

En esta tesis se plantea el estudio pormenorizado de una importante clase de álgebras de Lie nilpotentes, llamadas cuasi-filiformes, y que constituyen, tras la clase de álgebras filiformes, aquellas que tienen un índice de nilpotencia maximal. El estudio de las álgebras filiformes, así como el de sus propiedades geométricas y algebraicas, se remonta a principios de los años setenta, donde se obtienen los modelos graduados que constituyen, en cierto sentido, el armazón que permite obtener las restantes álgebras de este tipo mediante un proceso de deformaciones formales y contracciones. Actualmente, y considerando los resultados obtenidos en esta memoria, el estudio de las álgebras filiformes puede considerarse como finalizado, habiéndose demostrado su ineficacia de cara a la teoría general de álgebras de Lie, así como la ausencia de estructuras geométricas específicas sobre las mismas. La finalidad principal de esta memoria es demostrar que, a partir del nilíndice inmediatamente posterior al maximal, aparecen propiedades nuevas y relevantes en el estudio de la variedad de leyes resolubles y no resolubles. Dicho estudio cubre diversos aspectos : el algebraico, codificado en los teoremas de clasificación obtenidos, el geométrico, que se traduce en la existencia/ausencia de tensores especiales compatibles con el tensor estructural y la clausura de las órbitas por la acción del grupo general lineal, y el analítico, correspondiente al estudio de las funciones invariantes que son constantes en las órbitas de la representación coadjunta.

En el primer capítulo se exponen los rudimentos técnicos que se emplearán a lo largo de la memoria. Cabe destacar la combinación de técnicas puramente algebraicas, como la cohomología adjunta, con métodos geométricos como las ecuaciones estructurales de Maurer-Cartan, la teoría de invariantes de la representación coadjunta en su expresión analítica o la teoría de contracciones de Inönü-Wigner generalizadas. El empleo de tales herramientas tiene en cuenta desarrollos recientes, así como su adaptación al tipo de álgebras que se consideran.

Los resultados originales de la memoria comienzan en el capítulo segundo, donde se completan algunos aspectos referentes a la teoría de álgebras filiformes no cubiertos en la bibliografía [6]. Más concretamente, dentro del estudio de las clases de álgebras de Lie resolubles con invariantes de Casimir generalizados de cierto tipo, se completa un trabajo reciente de Šnobl y Winternitz sobre la teoría de invariantes de álgebras resolubles reales. En el citado artículo sólo se contempla uno de los dos modelos graduados nilpotentes existentes para el nilíndice maximal. El caso restante, correspondiente al modelo graduado que tiene una subálgebra de osciladores de codimensión uno, y que por tanto sólo existe en dimensión par (puede de hecho interpretarse como una deformación del modelo L_n para dimensiones pares), se completa plenamente en este segundo capítulo. En primer lugar se determinan todas las álgebras de Lie que poseen esta estructura como ideal resoluble maximal, y se concluye que una tal álgebra de Lie ha de ser forzosamente resoluble. En analogía con el caso analizado por Šnobl y Winternitz, aparecen familias dependientes de un parámetro para rango total igual a uno, correspondientes a combinaciones lineales de elementos nilindependientes en el álgebra de derivaciones. El modelo de rango máximo, como se sabía de la teoría de la rigidez, es único. A continuación se determinan explícitamente los invariantes

de Casimir generalizados. Mientras que para el modelo rígido no existen tales funciones invariantes no constantes, para las familias de rango uno se hallan invariantes no triviales, que en algunos casos son de tipo trascendente, dependiendo de la acción del toro externo de derivaciones. Este resultado es de interés de cara a la existencia de ideales propios de codimensión dos o tres que exhiben un operador de Casimir cuadrático, lo que permite interpretar la parte no racional del invariante con respecto a la métrica inducida por este Casimir especial. Por otra parte, la estructura de estos invariantes permite dar respuesta a otra cuestión estructural todavía abierta y referente a las álgebras filiformes. Se demuestra mediante un proceso de contracciones que dentro de la clase de álgebras de Lie perfectas, las filiformes no pueden aparecer nunca como nilradical complementario a la subálgebra semisimple maximal, lo que descarta la clase de álgebras filiformes para el estudio estructural de álgebras no resolubles. Este estudio se completa con la clasificación de las álgebras de Lie cuyo nilradical es isomorfo al álgebra casi filiforme de dimensión más pequeña. Este modelo presenta características interesantes que justifican dedicarle todo un parágrafo. En primer lugar, es la única que admite un operador de Casimir invertible, lo que implica la existencia de un campo de vectores dinámico asociado a esta estructura. Por otra, existen productos semidirectos de álgebras simples de rango uno con la citada álgebra de dimensión cinco, lo que pone de manifiesto que, a partir de nilíndice $n-2$, las álgebras de Lie perfectas pueden tener radicales nilpotentes.

El estudio sistemático de las álgebras cuasi-filiformes comienza en el capítulo quinto, partiendo de ciertos modelos clasificados por J. R. Gómez y A. Jiménez Merchán en 2002. Es interesante destacar que se ha hallado una omisión en la citada lista, correspondiente a ciertos casos degenerados que sólo existen en dimensiones pequeñas. El estudio de las derivaciones y los toros exteriores depara una novedad importante referente a la rigidez de álgebras resolubles. En este capítulo se hallan, por primera vez, ejemplos de álgebras de Lie resolubles reales y cohomológicamente rígidas que infringen el teorema de descomposición de Carles. Este hallazgo justifica que se clasifiquen todas las álgebras resolubles rígidas hasta dimensión ocho, poniendo de manifiesto cuáles de las formas reales nuevas corresponden a los sistemas de pesos de las complexificaciones, ya conocidas en la literatura. Al margen del citado resultado de Carles, pierden validez sobre los escalares reales la teoría de sistemas de pesos de Favre, la construcción de los grafos de pesos asociados a los mismos, y la caracterización de las resolubles rígidas mediante la noción de resolubilidad completa [4]. A la luz de las observaciones realizadas para la clase de álgebra rígidas reales, se conjetura que toda álgebra de Lie resoluble rígida y real debe poseer al menos una derivación diagonalizable. Observamos que esta conjetura, reformulada en términos de semi-invariantes y funciones racionales, enlaza con ciertos resultados de la teoría de sistemas completamente integrables de Arkhangel'skii sobre grupos triangulares superiores.

En los capítulos sexto y séptimo se desarrolla la teoría de derivaciones para las familias de álgebras de Lie cuasi-filiformes. Partiendo de la existencia de una derivación diagonal no nula, se clasifican las posibles álgebras de Lie resolubles con citado nilradical. De este modo se halla una treintena de clases de isomorfía, de las cuales un reducido número corresponde a estructuras que sólo aparecen en dimensión que no excede 12. La existencia de estos modelos particulares se debe a la relajación de las condiciones impuestas por el operador diagonal, y, por tanto, a la posibilidad de soluciones particulares del sistema que determinan. Una vez obtenida esta extensa clasificación, el paso siguiente consiste en estudiar si las álgebras resolubles resultantes son completas en el sentido de Schenkman y Jacobson. Mediante el estudio de la cohomología de Chevalley-Eilenberg, se determinan los tres primeros grupos de cohomología, de los cuales la completitud se deduce de la nulidad de los grupos de órdenes cero y uno. Por otra parte, se observa que la dimensión del segundo grupo de cohomología, cuyas clases determinan las clases de equivalencia de deformaciones infinitesimales, no está acotada por la estructura subyacente. Esto permite deducir nuevas vías para el análisis de una importante propiedad referente a la existencia de álgebras resolubles rígidas que no son cohomológicamente rígidas [9, 1].

El último capítulo está dedicado al estudio de endomorfismos anti-involutivos compatibles con la condición de integrabilidad de Nijenhuis, primer paso para la obtención de métricas compatibles con estructuras simplécticas y otros tensores estructurales asociados a un álgebra de Lie. Mediante el estudio de las distintas graduaciones y bases asociadas a las mismas, se demuestra que las álgebras de Lie cuasi-filiformes no admiten genéricamente una estructura compleja, salvo una cantidad reducida de modelos en dimensiones no superiores a seis. Este análisis es complementario a los trabajos publicados recientemente por el grupo de Geometría Diferencial del FaMaF de la Universidad de Córdoba (Rep. Argentina), donde se analizan grupos de baja dimensión obtenidos mediante extensiones por derivaciones. La conclusión fundamental de este capítulo es la imposibilidad de imponer estructuras de Kähler sobre álgebras basadas en las nilpotentes cuasi-filiformes. Este hecho confirma la sospecha de que la estructura de los vectores característicos constituye por sí misma una obstrucción al tensor de Nijenhuis.

El primer problema que surge de manera natural cuando se estudian las álgebras de Lie nilpotentes es la clasificación de estas estructuras en pequeña dimensión. La clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes se ha obtenido hasta dimensión 7. Para dimensiones inferiores o iguales a 6, hay, salvo isomorfismos, un número finito de álgebras de Lie nilpotentes complejas. En [2], se clasifican las álgebras de Lie complejas nilpotentes mediante su sucesión característica. Se obtiene entonces una lista bastante extensa formada por familias de álgebras de Lie no isomorfas entre ellas.

Nos planteamos a continuación, el estudio de las álgebras de Lie nilpotentes según su índice de nilpotencia, empezando por aquellas cuyo nilíndice es maximal, también llamadas filiformes. A partir de 1970, Vergne inició el estudio de las álgebras de Lie filiformes mostrando que toda álgebra de Lie filiforme naturalmente graduada es isomorfa o bien a L_n o bien a Q_{2n} con $n \in \mathbb{N}$ [51].

Más recientemente, Šnobl y Winternitz han determinado las álgebras de Lie resolubles cuyo nilradical es isomorfo a \mathfrak{L}_n . Con el fin de completar esta clasificación a todas las álgebras de Lie filiformes naturalmente graduadas hemos procedido análogamente con el álgebra Q_{2n} .

A continuación, demostramos que si un álgebra de Lie no escindida tiene un nilradical filiforme entonces es necesariamente resoluble. Por tanto, las álgebras de Lie filiformes no presentan ningún interés en el estudio de las álgebras de Lie no resolubles. Este resultado deja de ser cierto para las álgebras cuasi-filiformes. En efecto, calculando las álgebras de Lie con nilradical cuasi-filiforme naturalmente graduado, hemos hallado álgebras no resolubles con nilradical cuasi-filiforme.

Este mismo contra-ejemplo muestra claras diferencias entre las nociones de rigidez real y compleja. Puesto que la clasificación de las álgebras de Lie rígidas complejas ya está hecha hasta dimensión 8, nos planteamos calcular esta clasificación en el caso real.

Por otro lado, hemos determinado las álgebras de Lie cuasi-filiformes de rango no nulo, obteniendo una lista mucho más rica que en el caso filiforme [29]. Esta lista nos permite probar la completitud de las álgebras de Lie cuasi-filiformes. Recordemos que todas las álgebras filiformes son completas [3].

Por último, nos interesamos a la existencia de estructuras complejas asociadas a las álgebras filiformes y cuasi-filiformes. En el artículo [30] se demuestra la no existencia de estructuras complejas para las álgebras filiformes. Desde un punto de vista muy distinto, hemos demostrado este resultado de forma más directa y hemos visto que sí existen álgebras de Lie cuasi-filiformes dotadas de estructuras complejas.

Chapitre 11

Resumen en castellano

El propósito de esta memoria es clasificar ciertos tipos de álgebras de Lie reales y complejas cuyo nilradical posee una estructura determinada, dada por una graduación natural. Las estructuras graduadas nilpotentes ocupan un lugar privilegiado dentro de la variedad de leyes de álgebras de Lie (nilpotentes), ya que constituyen el armazón principal de ésta, en el sentido de que toda estructura no graduada puede obtenerse por deformación del álgebra graduada asociada. De este modo se establece una relación geométrica entre las órbitas, resultando que la estructura graduada asociada a cada álgebra de Lie es un punto de la clausura topológica de la órbita por la acción del grupo general lineal. En consecuencia, una clasificación de las álgebras graduadas nilpotentes es un punto de partida conveniente para abordar la clasificación de álgebras resolubles o con descomposición de Levi no trivial cuyo nilradical sea graduado naturalmente.

En los últimos años, respondiendo a motivaciones distintas, diversos autores han abordado el estudio de las álgebras de Lie con nilradical graduado. Estos trabajos abarcan diversos aspectos de la teoría de Lie, desde la clasificación de familias de álgebras en dimensión arbitraria¹ hasta la construcción efectiva de sistemas hamiltonianos completamente integrables, así como la búsqueda de nuevos criterios de rigidez o una formulación satisfactoria de las teorías gauge no abelianas.

En este trabajo se aborda la clasificación real de álgebras de Lie cuyo nilradical \mathfrak{n} es naturalmente graduado y cuya sucesión característica es $(\dim \mathfrak{n} - 2, 1, 1)$. La clasificación de álgebras de Lie nilpotentes graduadas naturalmente con nilíndice maximal, llamadas filiformes, constituye un resultado clásico [51] de gran importancia para el estudio de las componentes de la variedad de leyes, y las álgebras resolubles asociadas son rígidas. El siguiente paso es considerar las álgebras cuyo nilíndice es una unidad más baja, correspondiente a la sucesión característica arriba señalada, en ocasiones llamadas, por analogía, cuasifiliformes. A diferencia del caso filiforme, en la clasificación de las álgebras de Lie con nilradical de este nilíndice deben tenerse asimismo en cuenta las álgebras nilpotentes descomponibles, lo que da lugar a una casuística considerablemente más amplia al hallado para las álgebras filiformes. Entre todas las álgebras nilpotentes graduadas naturalmente de sucesión característica $(\dim \mathfrak{n} - 2, 1, 1)$ se ha dedicado un párrafo aparte a un caso especial en dimensión cinco, ya que el mismo presenta propiedades interesantes desde el punto de vista geométrico y de sus aplicaciones a los sistemas dinámicos.

En los capítulos sucesivos se aborda la clasificación sistemática de las álgebras de Lie en general cuyo

¹Es un hecho conocido que la clasificación de álgebras resolubles por dimensión constituye una tarea irrealizable a partir de dimensión 7, debido a la inexistencia de criterios efectivos que permitan separar las órbitas.

nilradical es cuasi-filiforme. Se deduce de dicho estudio que toda álgebra indescomponible con nilradical de este tipo es resoluble. Dos aspectos se han destacado en dicha clasificación. En primer lugar, el hallazgo de la existencia de un nuevo caso patológico en dimensión 9, lo que aumenta su número a tres.

Por otra parte, se analizan brevemente los invariantes de la representación coadjunta de álgebras resolubles con ciertos tipos destacados de nilradical. En todos los casos, dichos invariantes resultan ser funciones de los operadores de Casimir de su parte nilpotente, lo que concuerda con la hipótesis emitida en [13] respecto a la estructura de invariantes de álgebras resolubles obtenidas como extensiones por derivaciones. Asimismo, se trata más detalladamente la rigidez de las álgebras estudiadas, así como su relevancia en la clasificación real de álgebras rígidas. Se concluye la invalidez del teorema de estructura de Carles [18] para el caso real, así como de la teoría de sistemas de pesos de Favre [24].

1 Notación

En este párrafo fijamos la notación y los convenios que se emplearán a lo largo de esta memoria. Denotaremos por \mathbb{K} un cuerpo fijo, que en todo caso será el cuerpo real \mathbb{R} o complejo \mathbb{C} .

Definición 1 Sea L un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión n y μ una aplicación bilineal de $L \times L$ en L verificando :

1. $\mu(X, X) = 0 \quad \forall X \in L$
2. $\mu(X, \mu(Y, Z)) + \mu(Y, \mu(Z, X)) + \mu(Z, \mu(X, Y)) = 0 \quad \forall X, Y, Z \in L$
(condición de Jacobi)

El espacio vectorial L junto con la ley μ definen entonces un álgebra de Lie \mathfrak{g} sobre \mathbb{K} de dimensión n .

Observemos que la condición 1 implica la antisimetría de μ , es decir :

$$\mu(X, Y) = -\mu(Y, X) \quad \forall X, Y \in L$$

y que la recíproca es cierta cuando la característica de \mathbb{K} es distinta de 2. Se suele representar la ley μ mediante corchetes de la manera siguiente :

$$[X, Y] = \mu(X, Y) \quad \forall X, Y \in L$$

Por comodidad, a la hora de definir una ley μ escribiremos únicamente aquellos corchetes que son no nulos o que no se deducen de los anteriores a partir de la antisimetría de μ . Para simplificar la notación, también identificaremos el álgebra de Lie con el espacio vectorial al cual está asociada.

A toda álgebra de Lie \mathfrak{g} , le podemos asociar de modo natural las sucesiones de ideales :

$$\begin{aligned} D^0 \mathfrak{g} &= \mathfrak{g} \supseteq D^1 \mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \supseteq \dots \supseteq D^k \mathfrak{g} = [D^{k-1} \mathfrak{g}, D^{k-1} \mathfrak{g}] \supseteq \dots \\ C^0 \mathfrak{g} &= \mathfrak{g} \supseteq C^1 \mathfrak{g} = D^1 \mathfrak{g} \supseteq C^2 \mathfrak{g} = [C^1 \mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \supseteq \dots \supseteq C^k \mathfrak{g} = [C^{k-1} \mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \supseteq \dots \end{aligned}$$

llamadas respectivamente sucesión derivada y sucesión central descendente de \mathfrak{g} .

Definición 2 Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie. Se dice que :

1. \mathfrak{g} es resoluble si existe un entero $k \geq 1$ tal que $D^k \mathfrak{g} = \{0\}$.

2. \mathfrak{g} es nilpotente si existe un entero (llamado índice de nilpotencia o nilíndice $n(\mathfrak{g})$ de \mathfrak{g}) $k \geq 1$ tal que $C^k \mathfrak{g} = \{0\}$.

Recordemos que el radical (respectivamente el nilradical) de \mathfrak{g} al ideal resoluble (respectivamente el nilradical) más grande por la inclusión. El teorema de Levi asegura que toda álgebra se descompone como suma semi-directa de su radical y una cierta álgebra semi-simple (esto es que no tiene ideales resolubles a parte del $\{0\}$) llamada subálgebra de Levi. De esta manera, el estudio de las álgebras de Lie se reduce al de las semi-simples y al de las resolubles. Mientras la clasificación de las álgebras semi-simples se ha completado en los trabajos de Cartan, la clasificación de las álgebras resolubles, y en particular de las álgebras nilpotentes, sigue siendo un problema abierto.

En este trabajo vamos a estudiar las álgebras de Lie nilpotentes con nilíndice maximal, llamadas filiformes. El siguiente paso es considerar las álgebras cuyo nilíndice es una unidad más baja, en ocasiones llamadas, por analogía, cuasi-filiformes.

Definición 3 Sea \mathfrak{g} una álgebra nilpotente de dimensión n , se dice que es filiforme si el nilíndice es $n-1$ o equivalentemente si :

$$\dim C^k \mathfrak{g} = n - k - 1, \quad 1 \leq k \leq n - 1$$

Se dice que \mathfrak{g} es cuasi-filiforme si su nilíndice es $n-2$.

La clasificación de las álgebras de Lie filiformes graduadas naturalmente constituye un resultado clásico [51] de gran importancia para el estudio de las componentes de la variedad de leyes, y las álgebras resolubles asociadas son rígidas.

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie nilpotente de dimension n y nilíndice m , la serie central descendente define la siguiente filtración finita :

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g} \supseteq \mathfrak{g}_2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \supseteq \mathfrak{g}_3 = [\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}] \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{g}_{k+1} = [\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}] \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{g}_{m+1} = \{0\}$$

Podemos definir el álgebra de Lie graduada asociada a \mathfrak{g} , que denotamos $gr(\mathfrak{g})$, como :

$$gr \mathfrak{g} = \sum_{i=1}^m \frac{\mathfrak{g}_i}{\mathfrak{g}_{i+1}} = \sum_{i=1}^m W_i$$

$$[X + \mathfrak{g}_{i+1}, Y + \mathfrak{g}_{j+1}] = [X, Y] + \mathfrak{g}_{i+j+1} \quad \forall X \in \mathfrak{g}_i \quad \forall Y \in \mathfrak{g}_j$$

Diremos que es un álgebra de la forma $\{p_1, \dots, p_m\}$ si $\dim \frac{\mathfrak{g}_i}{\mathfrak{g}_{i+1}} = p_i$. Observamos que \mathfrak{g} y su álgebra graduada $gr(\mathfrak{g})$ son de la misma forma.

En particular, las álgebras de Lie filiformes son necesariamente de la forma $\{2, 1, 1, \dots, 1\}$, con lo cual, las álgebras de Lie graduadas asociadas a un álgebra filiforme son a su vez filiformes.

Definición 4 Una álgebra \mathfrak{g} es naturalmente graduada si es isomorfa a $gr \mathfrak{g}$.

Vergne clasificó las álgebras de Lie naturalmente graduadas filiformes, obteniendo el resultado siguiente [51] :

Teorema 1 Toda álgebra de Lie naturalmente graduada y filiforme es isomorfa a una de las siguientes álgebras :

1. L_n ($n \geq 3$) :

$$[X_1, X_i] = X_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-1$$

2. Q_{2m} ($m \geq 3$) :

$$\begin{aligned} [X_1, X_i] &= X_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq 2m-2 \\ [X_j, X_{2m+1-j}] &= (-1)^j X_{2m}, \quad 2 \leq j \leq m \end{aligned}$$

En consecuencia, salvo isomorfismos, sólo existen dos álgebras naturalmente graduadas filiformes de dimensión par y una única álgebra naturalmente graduada filiforme de dimensión impar.

Utilizando las notaciones anteriores, si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie cuasi-filiforme, sólo se pueden dar uno de los casos siguientes :

1. \mathfrak{g} es de la forma $t_1 = \{p_1 = 3, p_2 = 1, p_3 = 1, \dots, p_{n-2} = 1\}$.
2. \mathfrak{g} es de la forma $t_r = \{p_1 = 2, p_2 = 1, \dots, p_{r-1} = 1, p_r = 2, p_{r+1} = 1, \dots, p_{n-2} = 1\}$ con $r \in \{2, \dots, n-2\}$.

Siguiendo las ideas de Vergne, en [27] se clasificaron las álgebras naturalmente graduadas y cuasi-filiformes.

Proposición 1 [27] Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie cuasi-filiforme naturalmente graduada de dimensión n y de la forma t_r donde $r \in \{1, \dots, n-2\}$. Entonces \mathfrak{g} es isomorfa a una de las álgebras descritas a continuación.

1. \mathfrak{g} es de la forma t_1

(a) $L_{n-1} \oplus \mathbb{C}$ ($n \geq 4$)

$$[X_0, X_i] = X_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-3.$$

(b) $Q_{n-1} \oplus \mathbb{C}$ ($n \geq 7$, n impar)

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4, \\ [X_i, X_{n-i-2}] &= (-1)^{i-1} X_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}. \end{aligned}$$

2. \mathfrak{g} es de la forma t_r con $r \in \{2, \dots, n-2\}$

(a) $\mathfrak{L}_{n,r}$; $n \geq 5$, r impar, $3 \leq r \leq 2\lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1$

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & i = 1, \dots, n-3 \\ [X_i, X_{r-i}] &= (-1)^{i-1} X_{n-1}, & i = 1, \dots, \frac{r-1}{2} \end{aligned}$$

(b) $\mathfrak{Q}_{n,r}$; $n \geq 7$, n impar, r impar, $3 \leq r \leq n-4$

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & i = 1, \dots, n-4 \\ [X_i, X_{r-i}] &= (-1)^{i-1} X_{n-1}, & i = 1, \dots, \frac{r-1}{2} \\ [X_i, X_{n-2-i}] &= (-1)^{i-1} X_{n-2}, & i = 1, \dots, \frac{n-3}{2} \end{aligned}$$

(c) $\mathfrak{T}_{n,n-4}$; $n \geq 7$, n impar

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & i = 1, \dots, n-5 \\ [X_0, X_{n-3}] &= X_{n-2}, \\ [X_0, X_{n-1}] &= X_{n-3}, \\ [X_i, X_{n-4-i}] &= (-1)^{i-1} X_{n-1}, & i = 1, \dots, \frac{n-5}{2} \\ [X_i, X_{n-3-i}] &= (-1)^{i-1} \frac{n-3-2i}{2} X_{n-3}, & i = 1, \dots, \frac{n-5}{2} \\ [X_i, X_{n-2-i}] &= (-1)^i (i-1) \frac{n-3-i}{2} X_{n-2}, & i = 2, \dots, \frac{n-3}{2} \end{aligned}$$

(d) $\mathfrak{T}_{n,n-3}; \quad n \geq 6, n \text{ par}$

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & i &= 1, \dots, n-4 \\ [X_0, X_{n-1}] &= X_{n-2}, \\ [X_i, X_{n-3-i}] &= (-1)^{i-1} X_{n-1}, & i &= 1, \dots, \frac{n-4}{2} \\ [X_i, X_{n-2-i}] &= (-1)^{i-1} \frac{n-2-2i}{2} X_{n-2}, & i &= 1, \dots, \frac{n-4}{2} \end{aligned}$$

(e) $\mathfrak{E}_{9,5}^1$

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & i &= 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ [X_0, X_8] &= X_6, & [X_2, X_8] &= -3X_7, \\ [X_1, X_4] &= X_8, & [X_1, X_5] &= 2X_6, \\ [X_1, X_6] &= 3X_7, & [X_2, X_3] &= -X_8, \\ [X_2, X_4] &= -X_6, & [X_2, X_5] &= -X_7. \end{aligned}$$

(f) $\mathfrak{E}_{9,5}^2$

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & i &= 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ [X_0, X_8] &= X_6, & [X_2, X_8] &= -X_7, \\ [X_1, X_4] &= X_8, & [X_1, X_5] &= 2X_6, \\ [X_1, X_6] &= X_7, & [X_2, X_3] &= -X_8, \\ [X_2, X_4] &= -X_6, & [X_2, X_5] &= X_7, \\ [X_3, X_4] &= -2X_7. \end{aligned}$$

(g) $\mathfrak{E}_{9,5}^3$

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & i &= 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ [X_0, X_8] &= X_6, & [X_1, X_4] &= X_8, \\ [X_1, X_5] &= 2X_6, & [X_2, X_3] &= -X_8, \\ [X_2, X_4] &= -X_6, & [X_2, X_5] &= 2X_7, \\ [X_3, X_4] &= -3X_7. \end{aligned}$$

(h) $\mathfrak{E}_{7,3}$

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, & i &= 1, 2, 3, 4 \\ [X_0, X_6] &= X_4, & [X_2, X_6] &= -X_5, \\ [X_1, X_2] &= X_6, & [X_1, X_3] &= X_4, \\ [X_1, X_4] &= X_5. \end{aligned}$$

Observamos que no existen álgebras cuasi-filiformes de la forma t_2 .

Observación. El álgebra $\mathfrak{E}_{9,5}^3$ se ha omitido en la clasificación de [27]. En efecto, buscando las álgebras de dimensión 9 que tienen una derivación diagonal de la forma $\text{diag}(1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 5)$, obtenemos tres álgebras, respectivamente isomorfas a $\mathfrak{E}_{9,5}^1$, $\mathfrak{E}_{9,5}^2$ y $\mathfrak{E}_{9,5}^3$. Además, estas álgebras tienen una importancia considerable en los problemas de rigidez [8] [31].

2 Álgebras de Lie con nilradical nilpotente

2.1 Álgebras de Lie con nilradical filiforme

Šnobl y Winternitz han clasificado las álgebras de Lie resolubles cuyo nilradical es isomorfo al álgebra filiforme \mathfrak{L}_n . Estos autores representan dicha álgebra mediante $\mathfrak{n}_{n,1}$ y la definen en la base $\{e_1, \dots, e_n\}$

como

$$[e_i, e_n] = e_{i-1} \quad i = 2, \dots, n-1.$$

Teorema 2 [48] Sea \mathfrak{r} una álgebra de Lie resoluble cuyo nilradical es $\mathfrak{n}_{n,1}$, \mathfrak{r} es entonces isomorfa a una de las álgebras siguientes

1. si $\dim \mathfrak{r} = n+1$:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{r}_{n+1,1} : & \mathfrak{r}_{n+1,2} : \\ [f, e_i] = (n-2+\beta)e_i \quad i = 1, \dots, n-1 & [f, e_i] = e_i \quad i = 1, \dots, n-1 \\ [f, e_n] = e_n & \\ \mathfrak{r}_{n+1,3} : & \mathfrak{r}_{n+1,4} : \\ [f, e_i] = (n-i)e_i \quad i = 1, \dots, n-1 & [f, e_i] = e_i + \sum a^{i-k+1}e_k \quad i = 1, \dots, n-1 \\ [f, e_n] = e_n + e_{n-1} & \end{array}$$

2. si $\dim \mathfrak{r} = n+2$:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{r}_{n+1,3} : & \\ [f_1, e_i] = (n-1-i)e_i \quad i = 1, \dots, n-1 & [f_2, e_i] = e_i \quad i = 1, \dots, n-1 \\ [f_1, e_n] = e_n & \end{array}$$

Con el fin de completar este estudio a todas las álgebras de Lie filiformes naturalmente graduadas, hemos procedido análogamente con las álgebras $Q_{2n}(n \geq 3)$.

Proposición 2 Toda álgebra de Lie real resoluble, no nilpotente y tal que su nilradical sea isomorfo a $Q_{2n}(n \geq 3)$, tiene dimensión $2n+1$ ó $2n+2$.

Toda álgebra de Lie real resoluble de dimensión $2n+1$ y con nilradical Q_{2n} es isomorfa a una de las siguientes álgebras :

1. $\mathfrak{r}_{2n+1}(\lambda_2)$:

$$\begin{array}{ll} [X_1, X_k] = X_{k+1}, & 2 \leq k \leq 2n-2 \\ [X_k, X_{2n+1-k}] = (-1)^k X_{2n}, & 2 \leq k \leq n \\ [Y, X_1] = X_1, & \\ [Y, X_k] = (k-2+\lambda_2)X_k, & 2 \leq k \leq 2n-1 \\ [Y, X_{2n}] = (2n-3+2\lambda_2)X_{2n}. & \end{array}$$

2. $\mathfrak{r}_{2n+1}(2-n, \varepsilon)$

$$\begin{array}{ll} [X_1, X_k] = X_{k+1}, & 2 \leq k \leq 2n-2 \\ [X_k, X_{2n+1-k}] = (-1)^k X_{2n}, & 2 \leq k \leq n \\ [Y, X_1] = X_1 + \varepsilon X_{2n}, & \varepsilon = -1, 0, 1 \\ [Y, X_k] = (k-n)X_k, & 2 \leq k \leq 2n-1 \\ [Y, X_{2n}] = X_{2n}. & \end{array}$$

3. $\mathfrak{r}_{2n+1}(\lambda_2^5, \dots, \lambda_2^{2n-1})$

$$\begin{array}{ll} [X_1, X_k] = X_{k+1}, & 2 \leq k \leq 2n-2 \\ [X_k, X_{2n+1-k}] = (-1)^k X_{2n}, & 2 \leq k \leq n \\ [Y, X_{2+t}] = X_{2+t} + \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{2n-3-t}{2} \rfloor} \lambda_2^{2k+1} X_{2k+1+t}, & 0 \leq t \leq 2n-6 \\ [Y, X_{2n-k}] = X_{2n-k}, & k = 1, 2, 3 \\ [Y, X_{2n}] = 2X_{2n}. & \end{array}$$

donde el primer parámetro λ_2^{2k+1} no nulo es igual a 1.

Existe una única álgebra de Lie real resoluble \mathfrak{r}_{2n+2} de dimensión $2n+2$ cuyo nilradical es isomorfo a Q_{2n} :

$$\begin{aligned} [X_1, X_k] &= X_{k+1}, & 2 \leq k \leq 2n-2 \\ [X_k, X_{2n+1-k}] &= (-1)^k X_{2n}, & 2 \leq k \leq n \\ [Y_1, X_k] &= kX_k & 1 \leq k \leq 2n-1 \\ [Y_1, X_{2n}] &= (2n+1)X_{2n}, \\ [Y_2, X_k] &= X_k, & 2 \leq k \leq 2n-1 \\ [Y_2, X_{2n}] &= 2X_{2n}. \end{aligned}$$

Asimismo se determinan los invariantes de esta clase de álgebras por la representación coadjunta (invariantes de Casimir generalizados), completando de este modo los resultados obtenidos en el trabajo [48]. Se destaca en particular la existencia de una serie de álgebras resolubles dotadas con una estructura simpléctica exacta, que se traduce en la inexistencia de operadores invariantes no triviales. Del número y estructura de dichos invariantes para el resto de clases de isomorfía, se determinan aquellas dotadas de una estructura de contacto, que según la teoría de Reeb [45], permiten determinar un sistema dinámico sin singularidades asociado.

En el capítulo 2, demostramos que toda álgebra de Lie cuyo nilradical es filiforme es necesariamente resoluble. Este hecho conlleva a pensar que las álgebras de Lie filiformes tienen interés tan sólo dentro del marco resoluble, y no en la teoría estructural general.

2.2 Álgebras con nilradical cuasi-filiforme

Puesto que las álgebras filiformes no presentan ningún interés en el estudio de las álgebras no resolubles, nos proponemos plantear el problema del apartado anterior a las álgebras de Lie cuasi-filiformes. Hemos clasificado las álgebras complejas cuyo nilradical es una de las álgebras del teorema 1. Dado que esta clasificación es muy extensa, presentamos aquí, únicamente un caso muy especial.

Existen razones específicas para esta separación. En concreto, se trata del álgebra de Lie nilpotente de dimensión más baja que admite una forma bilineal simétrica, asociativa y no degenerada². Esta propiedad, que se traduce en la existencia de un operador de Casimir cuadrático no degenerado, nos permite construir un Lagrangiano $L(x)$ invariante por transformaciones gauge que reproduce las ecuaciones de movimiento de la teoría de Yang-Mills. Si bien desde el punto de vista físico la no compacidad implica la existencia de simetrías fantasma, las álgebras cuasi-clásicas son de interés en el estudio de los modelos integrables y para obtener soluciones de las ecuaciones de Yang-Baxter.

Consideramos el álgebra de Lie cuasi-filiforme naturalmente graduada $\mathcal{L}_{5,3}$ definida en la base $\{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4\}$ por los corchetes :

$$[X_0, X_1] = X_2, \quad [X_0, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_2] = X_4. \quad (11.1)$$

Proposición 3 Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie real no escindida con nilradical isomorfo a $\mathcal{L}_{5,3}$.

1. Si \mathfrak{g} es resoluble entonces $\dim \mathfrak{g} \leq 7$ y es isomorfa a una de las álgebras siguientes :

(a) $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,1}, \dots, \mathfrak{g}_{5,3}^{6,9}$ si $\dim \mathfrak{g} = 6$.

$\mathfrak{g}_{5,3}^{6,1}$:

$$[Y, X_0] = X_0, \quad [Y, X_i] = (i-1+\lambda)X_i \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \quad [Y, X_4] = (1+2\lambda)X_4.$$

²Estas álgebras se llaman comúnmente cuasi-clásicas.

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{g}_{5,3}^{6,2} : \\
&\quad [Y, X_i] = X_i \quad \text{para } i = 0, 3, \quad [Y, X_1] = -X_1 + X_4, \quad [Y, X_4] = -X_4. \\
&\mathfrak{g}_{5,3}^{6,3} : \\
&\quad [Y, X_0] = X_0 + X_4, \quad [Y, X_2] = X_2, \quad [Y, X_3] = 2X_3, \quad [Y, X_4] = X_4. \\
&\mathfrak{g}_{5,3}^{6,4} : \\
&\quad [Y, X_0] = X_0 - X_4, \quad [Y, X_2] = X_2, \quad [Y, X_3] = 2X_3, \quad [Y, X_4] = X_4. \\
&\mathfrak{g}_{5,3}^{6,5} : \\
&\quad [Y, X_0] = X_0 + X_1, \quad [Y, X_i] = iX_i \quad \text{para } i = 1, 2, 4, \quad [Y, X_3] = 3X_3 + X_4. \\
&\mathfrak{g}_{5,3}^{6,6} : \\
&\quad [Y, X_0] = X_0 - X_1, \quad [Y, X_1] = X_0 + X_1, \quad [Y, X_2] = 2X_2, \quad [Y, X_3] = 3X_3 - X_4, \\
&\quad [Y, X_4] = X_3 + 3X_4. \\
&\mathfrak{g}_{5,3}^{6,7} : \\
&\quad [Y, X_i] = -X_{i+1} \quad \text{para } i = 0, 3, \quad [Y, X_i] = X_{i-1} \quad \text{para } i = 1, 4. \\
&\mathfrak{g}_{5,3}^{6,8} : \\
&\quad [Y, X_0] = -X_1 + X_4, \quad [Y, X_1] = X_0, \quad [Y, X_3] = -X_4, \quad [Y, X_4] = X_3. \\
&\mathfrak{g}_{5,3}^{6,9} : \\
&\quad [Y, X_0] = -X_1 - X_4, \quad [Y, X_1] = X_0, \quad [Y, X_3] = -X_4, \quad [Y, X_4] = X_3.
\end{aligned}$$

(b) $\mathfrak{g}_{5,3}^{7,1}$ o $\mathfrak{g}_{5,3}^{7,2}$ si $\dim \mathfrak{g} = 7$.

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{g}_{5,3}^{7,1} : \\
&\quad [Y, X_i] = X_i \quad \text{para } i = 0, 2, 4, \quad [Y, X_3] = 2X_3 \\
&\quad [Z, X_i] = X_i \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \quad [Z, X_4] = 2X_4 \\
&\mathfrak{g}_{5,3}^{7,2} : \\
&\quad [Y, X_i] = -X_{i+1} \quad \text{para } i = 0, 3, \quad [Y, X_i] = X_{i-1} \quad \text{para } i = 1, 4 \\
&\quad [Z, X_0] = X_0, \quad [Z, X_i] = iX_i \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \quad [Z, X_4] = 3X_4
\end{aligned}$$

2. Si \mathfrak{g} no es resoluble entonces \mathfrak{g} tiene dimensión 8 ó 9 y es isomorfa a :

(a) el álgebra $\mathfrak{g}_{5,3}^{8,1}$ representada en la base $\{X_0, \dots, X_4, Y, Z, V\}$ por (11.1) y los corchetes que involucran Y, Z y V :

$$\begin{aligned}
&[Y, X_0] = X_0, \quad [Y, X_1] = -X_1, \quad [Y, X_3] = X_3, \quad [Y, X_4] = -X_4, \\
&[Z, X_1] = X_0, \quad [Z, X_4] = X_3, \\
&[V, X_0] = X_1, \quad [V, X_3] = X_4, \\
&[Y, Z] = 2Z, \quad [Y, V] = -2V, \quad [Z, V] = Y.
\end{aligned}$$

(b) o bien al álgebra $\mathfrak{g}_{5,3}^{9,1}$ representada en la base $\{X_0, \dots, X_4, Y, Y', Z, V\}$ por (11.1) y los corchetes que involucran Y, Y', Z y V :

$$\begin{aligned}
&[Y, X_0] = X_0, \quad [Y, X_1] = -X_1, \quad [Y, X_3] = X_3, \quad [Y, X_4] = -X_4, \\
&[Y', X_1] = X_1, \quad [Y', X_2] = X_2, \quad [Y', X_3] = X_3, \quad [Y', X_4] = 2X_4, \\
&[Z, X_1] = X_0, \quad [Z, X_4] = X_3, \\
&[V, X_0] = X_1, \quad [V, X_3] = X_4, \\
&[Y, Z] = Z, \quad [Y, V] = -V, \quad [Y', Z] = -Z, \quad [Y', V] = V, \\
&[Z, V] = Y - Y'.
\end{aligned}$$

La clasificación de las álgebras complejas con nilradical $\mathcal{L}_{5,3}$, es análoga a la clasificación real, teniendo en cuenta los isomorfismos siguientes :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_{5,3}^{6,3} \otimes \mathbb{C} &\sim \mathfrak{g}_{5,3}^{6,4} \otimes \mathbb{C} \\
\mathfrak{g}_{5,3}^{6,6} \otimes \mathbb{C} &\sim \mathfrak{g}_{5,3}^{6,1} \left(\frac{1+i}{1-i} \right) \otimes \mathbb{C} \\
\mathfrak{g}_{5,3}^{6,7} \otimes \mathbb{C} &\sim \mathfrak{g}_{5,3}^{6,1} (-1) \otimes \mathbb{C} \\
\mathfrak{g}_{5,3}^{6,8} \otimes \mathbb{C} &\sim \mathfrak{g}_{5,3}^{6,9} \otimes \mathbb{C} \sim \mathfrak{g}_{5,3}^{6,3} \otimes \mathbb{C} \\
\mathfrak{g}_{5,3}^{7,1} \otimes \mathbb{C} &\sim \mathfrak{g}_{5,3}^{7,2} \otimes \mathbb{C}
\end{aligned}$$

De entre las álgebras obtenidas en esta proposición, destacamos las álgebras $\mathfrak{g}_{5,3}^{8,1}$ y $\mathfrak{g}_{5,3}^{9,1}$. Para estas álgebras, el nilradical coincide con el radical y es isomorfo al álgebra cuasi-filiforme $\mathcal{L}_{5,3}$. Además, estas álgebras no son resolubles puesto que $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus_{2D_{\frac{1}{2}} \oplus D_0} \mathcal{L}_{5,3}$ es isomorfa a $\mathfrak{g}_{5,3}^{8,1}$ y es un ideal de $\mathfrak{g}_{5,3}^{9,1}$.

De esta manera hemos encontrado dos ejemplos de álgebras no resolubles con nilradical (radical) cuasi-filiforme.

Nos fijamos en particular en las álgebras de dimensión 6 con nilradical $\mathcal{L}_{5,3}$. Las álgebras de Lie reales de dimensión 6 con nilradical de dimensión 5 ya fueron clasificadas por Mubarakzyanov en 1963 [40]. Dicha clasificación fué completada y corregida por Turkowski [50] así como en [15]. No obstante, en ambas correcciones se encuentran errores en la clasificación de las álgebras con nilradical $\mathfrak{g}_{5,3}$ (que es isomorfa a $\mathcal{L}_{5,3}$), en efecto el álgebra $\mathfrak{g}_{6,81}$ es redundante por ser isomorfa a $\mathfrak{g}_{6,77}$ y además faltan las álgebras $\mathfrak{g}_{5,3}^{6,6}, \dots, \mathfrak{g}_{5,3}^{6,9}$.

Se tiene que las álgebras de Lie reales y resolubles, $\mathfrak{g}_{5,3}^{7,1}$ y $\mathfrak{g}_{5,3}^{7,2}$ son también rígidas. Además, observamos que estas dos álgebras no se descomponen como suma semi-directa del nilradical y de un toro exterior formado por elementos diagonalizables. Este ejemplo nos muestra entonces que el teorema de descomponibilidad de Carles [17] no se puede aplicar a las álgebras reales. Recordemos que, según este teorema, toda álgebra de Lie rígida resoluble compleja se descompone como $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}$ donde \mathfrak{n} es el nilradical y \mathfrak{t} es una subálgebra abeliana tal que, para todo $X \in \mathfrak{t}$, $\text{ad}X$ es semi-simple (\mathfrak{t} se llama toro exterior de derivaciones).

3 Sobre las álgebras resolubles reales rígidas

A partir del teorema de Carles y estudiando el sistema de raíces, se clasifican las álgebras de Lie reales, resolubles y rígidas hasta dimensión 8 [8]. De la casuística anterior se deduce que la clasificación de estructuras rígidas difiere notablemente en los casos real y complejo. Partiendo de la clasificación compleja conocida, y analizando la estructura de las formas canónicas de Jordan de los generadores del toro exterior de derivaciones, hemos deducido las formas reales rígidas correspondientes a cada uno de los sistemas de pesos considerados. Es importante destacar que, en estos casos, la rigidez algebraica es idéntica sobre ambos cuerpos, como consecuencia del carácter racional de los sistemas que definen las clases de cohomología. Estos resultados se resumen en el teorema siguiente :

Teorema 3 *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie real, resoluble y rígida de dimensión inferior o igual a 8. Entonces \mathfrak{g} es isomorfa a una de las álgebras \mathfrak{g}_i^j descritas en la lista [8] o bien a una de las álgebras siguientes :*

- Dimensión 4 :

$$\mathfrak{g}_4^2 : [X_1, X_3] = X_2, \quad [X_3, X_2] = X_1, \quad [X_4, X_1] = X_1, \quad [X_4, X_2] = X_2.$$

– Dimensión 5 :

$$\mathfrak{g}_5^2 : \begin{array}{llll} [X_1, X_2] = X_3, & [X_4, X_1] = X_1, & [X_4, X_2] = X_2, & [X_4, X_3] = 2X_3, \\ [X_5, X_1] = -X_2, & [X_5, X_2] = X_1. & & \end{array}$$

– Dimensión 6 :

$$\mathfrak{g}_6^4 : \begin{array}{llll} [X_1, X_3] = X_2, & [X_3, X_2] = X_1, & [X_4, X_1] = X_1, & [X_4, X_2] = X_2, \\ [X_5, X_6] = X_5. & & & \end{array}$$

– Dimensión 7 :

$$\mathfrak{g}_7^9 : \begin{array}{llllll} [X_1, X_2] = X_3, & [X_1, X_3] = X_4, & [X_2, X_3] = X_4, & [X_6, X_1] = -X_2, \\ [X_6, X_2] = X_1, & [X_6, X_4] = -X_5, & [X_6, X_5] = X_4, & [X_7, X_1] = X_1, \\ [X_7, X_2] = X_2, & [X_7, X_3] = 2X_3, & [X_7, X_4] = 3X_4, & [X_7, X_5] = 3X_5. \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_7^{10} : \begin{array}{llll} [X_5, X_1] = X_1, & [X_5, X_2] = X_2, & [X_5, X_3] = 2X_3, & [X_6, X_1] = -X_2, \\ [X_6, X_2] = X_1, & [X_7, X_4] = X_4, & & . \end{array}$$

– Dimensión 8 :

$$\mathfrak{g}_8^{34} : \begin{array}{llll} [X_1, X_3] = X_2, & [X_3, X_2] = X_1, & [X_4, X_1] = X_1, & [X_4, X_2] = X_2, \\ [X_5, X_7] = X_6, & [X_7, X_6] = X_5, & [X_8, X_5] = X_5, & [X_8, X_6] = X_6. \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_8^{35} : \begin{array}{llll} [X_1, X_3] = X_2, & [X_3, X_2] = X_1, & [X_4, X_1] = X_1, & [X_4, X_2] = X_2, \\ [X_5, X_6] = X_6, & [X_7, X_8] = X_8. & & \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_8^{36} : \begin{array}{llll} [X_1, X_2] = X_4, & [X_1, X_3] = X_5, & [X_6, X_i] = X_i & (i = 1, 4, 5), \\ [X_7, X_2] = -X_3, & [X_7, X_3] = X_2, & [X_7, X_4] = -X_5, & [X_7, X_5] = X_4, \\ [X_8, X_i] = X_i & (i = 2, 3, 4, 5). \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_8^{37} : \begin{array}{llll} [X_1, X_2] = X_5, & [X_3, X_4] = X_5, & [X_6, X_i] = X_i & (i = 1, \dots, 4), \\ [X_6, X_5] = 2X_5, & [X_7, X_1] = -X_2, & [X_7, X_2] = X_1, & [X_8, X_3] = -X_4, \\ [X_8, X_4] = X_3. \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_8^{38} : \begin{array}{llll} [X_1, X_2] = X_5, & [X_3, X_4] = X_5, & [X_6, X_i] = X_i & (i = 1, \dots, 4), \\ [X_6, X_5] = 2X_5, & [X_7, X_1] = X_1, & [X_7, X_2] = -X_2, & [X_8, X_3] = -X_4, \\ [X_8, X_4] = X_3. \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_8^{39} : \begin{array}{llll} [X_1, X_i] = X_{i+1}, & (2 \leq i \leq 4), & [X_3, X_2] = X_6, & [X_6, X_2] = X_5, \\ [X_7, X_1] = X_1, & [X_7, X_2] = X_2, & [X_7, X_3] = 2X_3, & [X_7, X_4] = 3X_4, \\ [X_7, X_5] = 4X_5, & [X_7, X_6] = 3X_6, & [X_8, X_1] = X_2, & [X_8, X_2] = -X_1, \\ [X_8, X_4] = -X_6, & [X_8, X_6] = X_4. \end{array}$$

$$\mathfrak{g}_8^{40} : \begin{array}{llll} [X_1, X_i] = X_{i+2}, & (2 \leq i \leq 4), & [X_2, X_3] = X_6, & [X_4, X_2] = X_5, \\ [X_7, X_1] = X_1, & [X_7, X_2] = X_2, & [X_7, X_3] = 2X_3, & [X_7, X_4] = 2X_4, \\ [X_7, X_5] = 3X_5, & [X_7, X_6] = 3X_6, & [X_8, X_1] = X_2, & [X_8, X_2] = -X_1, \\ [X_8, X_5] = X_6, & [X_8, X_6] = -X_5. \end{array}$$

Además, estas álgebras no son isomorfas entre sí.

Como consecuencia de este resultado, se coliga que la rigidez algebraica no implica la resolubilidad completa. Por tanto, la teoría de grafos asociada a los sistemas de pesos [5] en el sentido de Favre [24] debe modificarse para permitir la distinción de las estructuras rígidas, en analogía a las modificaciones pertinentes en la teoría clásicas (diagramas de Satake) para cubrir las formas reales. Por otra parte, este resultado demuestra que todas las álgebras de Lie nilpotentes reales de dimensión $n \leq 6$ aparecen como el nilradical de un álgebra resoluble algebraicamente rígida. Observamos que para dimensiones superiores, este resultado deja de cierto como consecuencia de la existencia de familias parametrizadas.

4 Sobre las álgebras nilpotentes de rango no nulo

El estudio de las álgebras nilpotentes de rango no nulo viene motivado por la teoría estructural general de las álgebras resolubles y sus posibles nilradicales [28]. Un importante resultado en esta dirección estipula que la existencia de una derivación³ inversible implica la nilpotencia del álgebra, en virtud del teorema de Engel.

Siguiendo este programa, en [29] se clasificaron las álgebras filiformes complejas de rango no nulo, obteniéndose el teorema que reproducimos a continuación.

Teorema 4 *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie de dimensión n que admite una derivación diagonal, no nula. Existe entonces una base $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ de \mathfrak{g} que cumple uno de los casos siguientes :*

i) $\mathfrak{g} = L_n$, $n \geq 3$

$$[Y_1, Y_i] = Y_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-1$$

ii) $\mathfrak{g} = A_n^k(\lambda_1, \dots, \lambda_{t-1})$, $t = \lfloor \frac{n-k+1}{2} \rfloor$, $2 \leq k \leq n-3$

$$\begin{aligned} [Y_1, Y_i] &= Y_{i+1} & i &= 2, \dots, n-1 \\ [Y_i, Y_{i+1}] &= \lambda_{i-1} Y_{2i+k-1} & i &= 1, \dots, t \\ [Y_i, Y_j] &= a_{i,j} Y_{i+j+k-2} & 2 \leq i < j, i+j+k-2 \leq n \end{aligned}$$

iii) $\mathfrak{g} = Q_{2m}$, $m \geq 3$, $n = 2m$

$$\begin{aligned} [Y_1, Y_i] &= Y_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq 2m-2 \\ [Y_j, Y_{2m+1-j}] &= (-1)^j Y_{2m}, \quad 2 \leq j \leq m \end{aligned}$$

iv) $\mathfrak{g} = B_n^k(\lambda_1, \dots, \lambda_{t-1})$, $t = \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor$, $2 \leq k \leq n-3$, $n = 2m+1$

$$\begin{aligned} [Y_1, Y_i] &= Y_{i+1} & i &= 2, \dots, n-2 \\ [Y_i, Y_{n-i+1}] &= (-1)^{i+1} Y_n, \quad 2 \leq i \leq m \\ [Y_i, Y_{i+1}] &= \lambda_{i-1} Y_{2i+k-1} & i &= 2, \dots, t \\ [Y_i, Y_j] &= a_{i,j} Y_{i+j+k-2} & 2 \leq i < j \leq n-2, i+j+k \leq n, j \neq i+1 \end{aligned}$$

v) $\mathfrak{g} = C_n(\lambda_1, \dots, \lambda_t)$, $t = m-1$, $n = 2m+1$

$$\begin{aligned} [Y_1, Y_i] &= Y_{i+1} & i &= 2, \dots, n-2 \\ [Y_i, Y_{n-i+1}] &= (-1)^{i+1} Y_n, \quad 2 \leq i \leq m \\ [Y_i, Y_{n-i-2k+1}] &= (-1)^{i+1} \lambda_k Y_n & i &= 2, \dots, n-2-2k, k=1, \dots, m-1 \end{aligned}$$

³Una derivación es un endomorfismo que verifica la condición de Leibniz.

Además, las constantes $a_{i,j}$ verifican :

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= a_{i+1,j} + a_{i,j+1} \\ a_{i,i+1} &= \lambda_{i-1} \\ a_{i,i} &= 0 \end{aligned}$$

Cabe destacar que la familia C_n anterior no es realmente de rango uno, sino dos, como demostramos con un sencillo cambio de base. Del mismo resulta que esta C_n es isomorfa al álgebra graduada Q_n .

El objetivo de este capítulo es generalizar esta clasificación para las álgebras cuasi-filiformes, sucesores inmediatos de las anteriores respecto de la sucesión característica. Para ello, consideramos un álgebra de Lie \mathfrak{g} cuasi-filiforme tal que $gr\mathfrak{g}$ sea isomorfa a una de las álgebras de la proposición 1, de donde deducimos que existe una base de \mathfrak{g} en la que el tensor de estructura adopta una forma especial. En particular, hemos hallado una nueva álgebra graduada naturalmente que fue omitida en la clasificación original [27]. Introducimos una derivación diagonal no nula de \mathfrak{g} e intentamos construir una base de autovectores de g que conserven la graduación. La determinación de tales álgebras presenta un grado de dificultad considerable con respecto al caso filiforme, debido fundamentalmente a la existencia de un autovector cuya posición en los bloques de la graduación no está determinada, lo que nos obliga a considerar todas sus posibles ubicaciones. Este hecho obliga asimismo a considerar sumas directas, lo que aumenta significativamente el número de subcasos que deben estudiarse. Como resultado de este análisis, se obtienen 21 familias en dimensión arbitraria, equitativamente distribuidas por paridad de dimensiones, así como cuatro casos especiales en baja dimensión, cuya existencia es una consecuencia de la relajación de las condiciones impuestas.

Partiendo de la clasificación obtenida, demostramos en el capítulo 7 que todas las álgebras cuasi-filiformes de rango no nulo son completables, es decir, aparecen como nilradical de un álgebra resoluble completa, lo que se traduce en la nulidad de los dos primeros grupos de cohomología adjunta. Recordemos que la completitud de las álgebras filiformes había sido demostrado en [3].

5 Estructuras Complejas y álgebras cuasi-filiformes

El estudio geométrico y algebraico de las clases de álgebras nilpotentes y resolubles consideradas en esta memoria se completa con el análisis de existencia de estructuras complejas. En analogía con los resultados obtenidos en [30], hallamos que tales estructuras sólo existen en dimensiones bajas. Este hecho confirma la hipótesis de que el alto grado de nilpotencia de las álgebras constituyen una obstrucción relevante para el problema de integrabilidad del tensor de Nijenhuis. Como consecuencia de ello, no existen estructuras de tipo Kähler ni otras que pasen por condiciones de compatibilidad con estructuras complejas. Estos resultados ponen de manifiesto que la geometría basada en estos modelos es sumamente estática, lo que parece confirmar observaciones independientes de que son los nilíndices bajos los que proporcionan propiedades geométricas suplementarias. Por otra parte, este estudio completa los trabajos recientes sobre estructuras geométricas en grupos de Lie de baja dimensión [43].

Sea G un grupo de Lie real de dimensión par y \mathfrak{g} su álgebra de Lie.

Definición 5 Una estructura compleja sobre G es un endomorfismo J tal que :

1. $J^2 = -Id$,
2. $N(J)(X, Y) = [J(X), J(Y)] - [X, Y] - J([J(X), Y]) - J([X, J(Y)]) = 0 \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$
(condición de Nijenhuis).

Los problemas de existencia y clasificación de estructuras complejas son complicados y se han resuelto fundamentalmente para pequeñas dimensiones. En el artículo [43], se han estudiado las estructuras complejas y simplécticas de las álgebras de Lie de dimensión 4. En dimensión 6, la clasificación de las estructuras complejas se ha obtenido para las álgebras nilpotentes en [46]. En este sentido, uno de los únicos resultados generales es la no-existencia de estructuras complejas para las álgebras filiformes [30]. Este mismo resultado ha sido demostrado posteriormente por [19] mediante argumentos completamente diferentes basados en la noción de estructuras complejas generalizadas que vamos a describir a continuación.

5.1 Estructuras Complejas Generalizadas

Las estructuras complejas generalizadas fueron introducidas por Hitchin en el contexto general de las variedades diferenciales de dimensión par [33]. Más adelante, Cavalcanti y Gualtieri prosiguieron el estudio de dichas estructuras ([19], [18]). A continuación, presentaremos las definiciones preliminares así como los resultados fundamentales de sus trabajos. Nos vamos a interesar, en particular, a las estructuras complejas generalizadas invariantes por la izquierda de los grupos de Lie.

Sea G un grupo de Lie de dimensión $2n$ y \mathfrak{g} su correspondiente álgebra de Lie. Denotamos por \mathfrak{g}^* el espacio dual de \mathfrak{g} que se identifica con el conjunto de las formas diferenciables de grado 1 invariantes por la izquierda sobre G . Recordemos también que, sobre \mathfrak{g}^* podemos definir la derivada exterior de la siguiente manera. Si $\alpha \in \mathfrak{g}^*$, entonces $d\alpha \in \Lambda^2(\mathfrak{g}^*)$ y viene dada por $d\alpha(X, Y) = -\alpha[X, Y]$ donde $[\cdot, \cdot]$ representa el corchete de \mathfrak{g} .

En primer lugar, definimos sobre el espacio vectorial $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$, un producto que llamaremos corchete de Courant, como :

$$[X + \xi, Y + \eta]_c = [X, Y] + \mathcal{L}_X \eta - \mathcal{L}_Y \xi - \frac{1}{2} d(I_X \eta - I_Y \xi).$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$, $\xi, \eta \in \mathfrak{g}^*$ y $I_X \eta$ denota el producto interior de X sobre η . Observamos que esta operación es antisimétrica y que verifica la identidad de Jacobi (en el contexto de las variedades diferenciables, este corchete se define análogamente sobre la suma del fibrado tangente y del fibrado exterior, pero el corchete no verifica necesariamente la identidad de Jacobi). Por la tanto, el espacio vectorial $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ dotado del corchete de Courant es un álgebra de Lie real de dimensión $4n$.

Dicha álgebra de Lie es un álgebra de Lie cuadrática ya que también podemos definir un producto escalar de la manera siguiente :

$$\langle X + \xi, Y + \eta \rangle = \frac{1}{2} (\xi(Y) + \eta(X)).$$

Definición 6 Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie real de dimensión par $2n$. Una estructura compleja generalizada sobre \mathfrak{g} es un endomorfismo \mathcal{J} de $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ tal que :

1. $\mathcal{J}^2 = -Id$,
2. \mathcal{J} es ortogonal con respecto al producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, es decir :

$$\langle \mathcal{J}(X + \xi), \mathcal{J}(Y + \eta) \rangle = \langle X + \xi, Y + \eta \rangle \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g} \quad \forall \xi, \eta \in \mathfrak{g}^*,$$

3. Si L es el espacio propio de \mathcal{J} correspondiente al valor propio $+i$, entonces L debe ser involutivo con respecto al corchete de Courant, lo que significa que $[L, L]_c \subset L$.

Observamos que la signatura del producto escalar viene dada por $(2n, 2n)$. Se puede comprobar que la subálgebra L de $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ es un espacio isótropo, es decir :

$$\langle X + \xi, Y + \eta \rangle = 0$$

para todo $X + \xi, Y + \eta \in L$.

Como además tiene dimensión $2n$, decimos que L es maximal isótropo.

Consideramos la proyección de L sobre \mathfrak{g} y denotamos por k la codimensión de la proyección de L sobre \mathfrak{g} , está claro que

$$0 \leq k \leq n.$$

Definición 7 Si k es la codimensión de la proyección de L sobre \mathfrak{g} , decimos que la estructura compleja generalizada \mathcal{J} es del tipo k .

En general, según el teorema 3.8 [32], toda estructura compleja generalizada del tipo k se puede escribir como una suma directa de una estructura compleja de dimensión k y de una estructura simpléctica de dimensión $2n - 2k$. Deducimos entonces que toda estructura compleja del tipo n se puede definir mediante una estructura compleja sobre \mathfrak{g} y que toda estructura compleja del tipo 0 proviene de una forma simpléctica de \mathfrak{g} .

Sea T el álgebra tensorial de $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ y I el ideal generado por los elementos de la forma $\{X + \xi \otimes X + \xi - \langle X + \xi, X + \xi \rangle \cdot 1 : X + \xi \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*\}$. Por definición, el espacio cociente $C = T/I$ es el álgebra de Clifford de $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ asociado al producto escalar \langle, \rangle .

Como C es un álgebra asociativa simple, todas las representaciones irreducibles son equivalentes. Decimos que $\phi : C \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(S)$ es una representación espinorial cuando es una representación simple de C sobre S que llamaremos espacio de espinores.

En adelante, consideraremos $S = \wedge \mathfrak{g}^*$ con la representación espinorial definida por la acción de Clifford :

$$\begin{aligned} \circ : \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^* \times \wedge \mathfrak{g}^* &\rightarrow \wedge \mathfrak{g}^* \\ (X + \xi, \rho) &\mapsto (X + \xi) \circ \rho = i_X \rho + \xi \wedge \rho. \end{aligned}$$

Dado un espinor no-nulo $\rho \in \wedge \mathfrak{g}^*$, definimos el conjunto $L_\rho \subset \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ como :

$$L_\rho = \{X + \xi \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^* : (X + \xi) \circ \rho = 0\}.$$

Observamos que L_ρ es un espacio isótropo. Diremos que ρ es un espinor puro si L_ρ es maximal isótropo. Recíprocamente, si L es un espacio maximal isótropo, podemos considerar el conjunto U_L de los espinores puros ρ tales que $L = L_\rho$.

En particular, cuando L es el $+i$ -espacio propio de una estructura compleja generalizada, se demuestra que el conjunto U_L es una recta generada por el espinor puro :

$$\rho = \Omega e^{B+i\omega}$$

donde B, ω son 2-formas reales y $\Omega = \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_k$, con $\theta_1, \dots, \theta_k$ 1-formas complejas.

Además, de la proposición III.2.3 [21] deducimos que $L \cap \overline{L} = \{0\}$ si y sólo si :

$$\omega^{n-k} \wedge \Omega \wedge \overline{\Omega} \neq 0, \quad (11.2)$$

donde L es el $+i$ -espacio propio de una estructura compleja generalizada.

En [32], se demuestra también que la condición de involutividad sobre L es equivalente a la condición de integrabilidad :

$$\exists X + \xi \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^* / d\rho = (X + \xi) \circ \rho. \quad (11.3)$$

5.2 Aplicación a las nilvariedades

Consideramos una nilvariedad real de dimensión par G y su álgebra de Lie \mathfrak{g} . La sucesión central descendente asociada a \mathfrak{g} viene dada por :

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^0 &= \mathfrak{g}, \\ \mathfrak{g}^i &= [\mathfrak{g}^{i-1}, \mathfrak{g}].\end{aligned}$$

Como \mathfrak{g} es nilpotente, existe un cierto entero m , llamado índice de nilpotencia de \mathfrak{g} , tal que $\mathfrak{g}^{m-1} \neq 0$ y $\mathfrak{g}^m = 0$.

Tomando el dual, obtenemos una sucesión creciente de subespacios de \mathfrak{g}^* , que denotamos V_i . Cada V_i se define como el anulador de \mathfrak{g}^i , es decir :

$$\begin{cases} V_0 = \{0\} \\ V_i = \{\varphi \in \mathfrak{g}^* \mid \varphi(X) = 0, \forall X \in \mathfrak{g}^i\}.\end{cases}$$

Esta claro que $V_m = \mathfrak{g}^*$. Observamos que los espacios V_i también se pueden escribir como :

$$V_i = \{\varphi \in \mathfrak{g}^* \mid I_X d\varphi \in V_{i-1}, \forall X \in \mathfrak{g}\}.$$

Definición 8 Sea α una p -forma sobre \mathfrak{g} . El grado de nilpotencia de α , que denotamos $\text{nil}(\alpha)$, es el más pequeño entero i tal que $\alpha \in \wedge^p V_i$.

Sunpogamos que \mathfrak{g} está dotada de una estructura compleja generalizada del tipo k . Resulta conveniente ordenar las formas $\{\theta_1, \dots, \theta_k\}$ según su grado de nilpotencia y además se pueden escoger de manera que los $\{\theta_j : \text{nil}(\theta_j) > i\}$ sean linealmente independientes modulo V_i . En [19], se demuestra que existe una descomposición $\Omega = \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_k$ tal que :

- a) $\text{nil}(\theta_i) \leq \text{nil}(\theta_j)$ si $i < j$,
- b) para cada i , las formas $\{\theta_j : \text{nil}(\theta_j) > i\}$ son linealmente independientes modulo V_i .

Una tal descomposición se llamará apropiada.

Teorema 5 Si \mathfrak{g} es un álgebra de Lie nilpotente dotada de una estructura compleja generalizada, el espinor puro asociado ρ es una forma cerrada, es decir que $d\rho = 0$.

De la demostración del teorema (ver [19]), se deduce el corolario siguiente.

Corolario 1 Si escogemos una descomposición apropiada de Ω entonces

$$d\theta_i \in \mathcal{I}(\{\theta_j : \text{nil}(\theta_j) < \text{nil}(\theta_i)\})$$

donde \mathcal{I} denota el ideal generado por sus argumentos.

En particular, tenemos que :

$$d\theta_i \in \mathcal{I}(\theta_1 \dots \theta_{i-1}).$$

El lema siguiente impone una condición más sutil sobre las formas θ_i .

Lema 1 Consideramos una descomposición apropiada de Ω . Si $\dim(\frac{V_{i+1}}{V_j}) = 1$ entonces o bien existe un θ_i de grado de nilpotencia j o bien no existe ningún θ_i de grado $j+1$.

A partir de este lema, obtenemos el teorema siguiente.

Teorema 6 Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie real nilpotente de dimensión $2n$ que admite una estructura compleja generalizada del tipo $k > 1$. Si existe un entero $j > 0$ tal que :

$$\dim\left(\frac{V_{i+1}}{V_i}\right) = 1 \quad , \quad \forall i \geq j$$

entonces k está acotado superiormente por :

$$k \leq \begin{cases} 2n - \text{nil}(\mathfrak{g}) + j - 2 & \text{si } j > 1 \\ 2n - \text{nil}(\mathfrak{g}) & \text{si } j = 1. \end{cases}$$

Observación. Aplicación al caso filiforme.

Si \mathfrak{g} es filiforme, este teorema nos permite recuperar el resultado de [30].

En efecto, cogiendo $m = 2n - 1$ y $j = 1$ obtenemos $k < 2$. No existe por tanto ninguna estructura del tipo n salvo cuando $n = 1$ pero en este caso el álgebra es abeliana.

5.3 Estructuras complejas sobre las álgebras de Lie cuasi-filiformes

En este apartado, vamos a determinar las álgebras de Lie cuasi-filiformes que poseen una estructura compleja o equivalentemente una estructura compleja generalizada del tipo $k = n$.

Si \mathfrak{g} es de la forma t_1 , el teorema 6 implica que $k = n = 2$ y entonces \mathfrak{g} es isomorfa a $\mathfrak{L}_3 \oplus \mathbb{R}$. Se puede verificar que dicha álgebra posee una estructura compleja asociada al espinor

$$\Omega = (\omega_0 + i\omega_1) \wedge (\omega_2 + i\omega_3)$$

donde $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ es la base dual de la base homogénea $\{X_0, X_1, X_2, X_3\}$ de la proposición 1.

Supongamos que \mathfrak{g} es un álgebra cuasi-filiforme de la forma t_r con $r \geq 3$. Según el teorema 6, $n = k \leq r$. Para saber en este caso qué álgebras están dotadas de una estructura compleja debemos estudiar más precisamente las formas $\theta_1 \dots \theta_k$.

Lema 2 Sea un \mathfrak{g} un álgebra cuasi-filiforme de la forma t_r con $r \geq 3$, que posee una estructura compleja del tipo k . Se pueden escoger las formas $\theta_1 \dots \theta_k$ asociadas a la estructura compleja generalizada de manera que verifiquen

$$\text{nil}(\theta_1) = 1, \text{nil}(\theta_2) = r, \text{nil}(\theta_3) = r + 1 \dots \text{nil}(\theta_k) = r + k - 2$$

o bien

$$\text{nil}(\theta_1) = 1, \text{nil}(\theta_2) = r, \text{nil}(\theta_3) = r \dots \text{nil}(\theta_k) = r + k - 3.$$

En el segundo caso, tenemos que $k < r$.

Ejemplo. Consideramos un álgebra cuasi-filiforme \mathfrak{g} de dimensión 6 definida en la base $\{X_0, X_1, \dots, X_5\}$ por :

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, \quad i = 1, 2, 3, \\ [X_1, X_2] &= X_5, \\ [X_1, X_5] &= \delta X_4, \quad \delta \in \{0, 1, -1\}. \end{aligned}$$

Si \mathfrak{g} admite una estructura compleja, le podemos asociar una estructura compleja generalizada del tipo $k = 3$ y un espinor :

$$\Omega = \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3,$$

donde θ_1, θ_2 y θ_3 son 1-formas complejas. Observamos que \mathfrak{g} es de la forma t_3 y según el lema precedente los nilíndices correspondientes son :

$$\text{nil}(\theta_1) = 1, \text{nil}(\theta_2) = 3, \text{nil}(\theta_3) = 4.$$

Las formas complejas θ_1, θ_2 et θ_3 se escriben pues de la forma siguiente :

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \lambda_0 \omega_0 + \lambda_1 \omega_1, \\ \theta_2 &= \beta_0 \omega_0 + \beta_1 \omega_1 + \beta_2 \omega_2 + \beta_3 \omega_3 + \beta_5 \omega_5, \\ \theta_3 &= \gamma_0 \omega_0 + \gamma_1 \omega_1 + \gamma_2 \omega_2 + \gamma_3 \omega_3 + \gamma_4 \omega_4 + \gamma_5 \omega_5\end{aligned}$$

donde $\lambda_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}$, γ_4 son no-nulos y β_3, β_5 no se anulan simultaneamente.

Además, la condición $\theta_1 \wedge \overline{\theta_1} \neq 0$ es equivalente a que la parte imaginaria de $\lambda_0 \overline{\lambda_1}$ sea no-nula. El corolario 1 implica :

$$\begin{cases} \beta_5 \lambda_0 - \beta_3 \lambda_1 &= 0 \\ -\gamma_3 \beta_3 \lambda_1 + \gamma_4 \beta_2 \lambda_1 + \gamma_5 \beta_3 \lambda_0 &= 0 \\ \gamma_4 (\beta_5 \lambda_1 + \delta \beta_3 \lambda_0) &= 0 \\ -\gamma_3 \beta_5 \lambda_1 - \delta \gamma_4 \beta_2 \lambda_0 + \gamma_5 \beta_5 \lambda_0 &= 0. \end{cases}$$

De la primera y tercera ecuación deducimos :

$$\lambda_1^2 + \delta \lambda_0^2 = 0$$

Para $\delta = 0$, se llega a una contradicción con $\theta_1 \wedge \overline{\theta_1} \neq 0$. Si $\delta = -1$, entonces $\lambda_1 = \pm \lambda_0$ y como el espinor se define de forma única salvo una constante de multiplicación, podemos coger $\theta_1 = \omega_0 \pm \omega_1$, lo cual contradice también $\theta_1 \wedge \overline{\theta_1} \neq 0$.

Finalmente, cuando $\delta = 1$, el espinor $\Omega = (\omega_0 + i\omega_1) \wedge (\omega_3 + i\omega_5) \wedge (\omega_2 + i\omega_4)$ está asociado a una estructura compleja de \mathfrak{g} . Así el álgebra de Lie \mathfrak{g} admite una estructura compleja si y sólo si $\delta = 1$.

En primer lugar, revisamos la clasificación de 1 para encontrar las álgebras de Lie cuasi-filiformes reales naturalmente graduadas y de dimensión par. Combinando el lema anterior con esta clasificación, determinamos las álgebras cuasi-filiformes que poseen una estructura compleja.

Teorema 7 *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie real cuasi-filiforme y de dimensión par que admite una estructura compleja. Entonces, \mathfrak{g} es isomorfa o bien al álgebra de dimensión 4, $\mathfrak{L}_3 \oplus \mathbb{R}$, o bien al álgebra de dimensión 6, $\mathfrak{n}_{6,3}$.*

Desde el punto de vista de las estructuras complejas generalizadas y de los espinores asociados, hemos podido generalizar el resultado encontrado por [30] para las álgebras filiformes a las álgebras cuasi-filiformes.

Concluimos que, salvo isomorfismos, sólo existen dos álgebras cuasi-filiformes que poseen una estructura compleja :

1. En dimesión 4, obtenemos el álgebra $\mathfrak{L}_3 \oplus \mathbb{R}$ dada en la base $\{X_0, X_1, X_2, X_3\}$ por

$$[X_0, X_1] = X_2.$$

2. En dimensión 6, se obtiene el álgebra $\mathfrak{n}_{6,3}$ definida en la base $\{X_0, X_1, \dots, X_5\}$ por

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1}, \quad i = 1, 2, 3 \\ [X_1, X_2] &= X_5, \\ [X_1, X_5] &= X_4. \end{aligned}$$

Notemos que en [46], el álgebra $\mathfrak{n}_{6,3}$ se define en la base $\{X_1, \dots, X_6\}$ mediante :

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= X_3, & [X_1, X_3] &= X_4, & [X_1, X_4] &= X_6, \\ [X_2, X_3] &= -X_5, & [X_2, X_5] &= -X_6. \end{aligned}$$

De la clasificación de Salamon, se comprueba que ésta es la única álgebra cuasi-filiforme de Lie de dimensión 6 que admite una estructura compleja.

Finalmente, producto de investigaciones paralelas, se incluye un anexo sobre la variedad de leyes de álgebras de Jordan en baja dimensión. Este trabajo se interrelaciona, a través de la teoría de deformaciones y contracciones, con las variedad de leyes de álgebras de Lie. En este contexto, se observan ciertas similitudes entre las propiedades geométricas y de órbitas en una y otra variedades, lo que nos ha permitido extrapolar los estudios conocidos a estas nuevas estructuras.

Chapitre 12

Publications/Publicaciones

1. J. M. Ancochea Bermúdez, R. Campoamor-Stursberg, L. García Vergnolle, *Indecomposable Lie algebras with nontrivial Levi decomposition cannot have filiform radical*, Int. Math. Forum, Vol. 1 (2006) no. 5-8, 309 - 316.
2. J. M. Ancochea, R. Campoamor-Stursberg, L. García Vergnolle, *Solvable Lie algebras with naturally graded nilradicals and their invariants*, J. Phys. A 39 (2006), no. 6, 1339-1355.
3. J.M. Ancochea Bermúdez, R. Campoamor-Stursberg, L. García Vergnolle, *Les algèbres de Lie résolubles rigides réelles ne sont pas nécessairement complètement résolubles*, Linear Algebra Ap. 418(2006) no.2-3,657-664.
4. J. M. Ancochea Bermúdez, R. Campoamor-Stursberg, M. Goze, L. García Vergnolle, *Les Algèbres de Lie réelles résolubles algébriquement rigides*, Monatshefte für Mathematik. 152 (2007) 187-195.
5. J. M. Ancochea Bermúdez, R. Campoamor-Stursberg, L. García Vergnolle, J. Sánchez Hernández, *Contractions d'algèbres de Jordan en dimension 2* J. Algebra. 319 (2008) 2395-2409.
6. L. García Vergnolle, *Sur les algèbres de Lie quasi-filiformes admettant un tore de dérivations*, Manuscripta math. 124 (2007) 489-505.
7. L. García Vergnolle, E. Remm, *Structures complexes sur les algèbres de Lie nilpotentes quasi-filiformes*, arXiv :0805.1833v1 [math.RA].
8. L. García Vergnolle, E. Remm, *Complex Structures on quasi-filiform Lie algebras* (aceptado en Journal of Lie Theory).
9. L. García Vergnolle, *Algèbres de Lie quasi-filiformes complétables* (enviado a publicación).

Bibliographie

- [1] J. M. Ancochea, On the rigidity of solvable Lie algebras, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. 247 (1988), 403-445.
- [2] J.M. Ancochea, Sur la classification des algèbres de Lie rigides. Thèse, Mulhouse (1985).
- [3] J. M. Ancochea, R. Campoamor, Completable filiform Lie algebras, Linear Algebra and Appl. 367 (2003), 185-191.
- [4] J. M. Ancochea, R. Campoamor. Complete Lie algebras generated by the derivations of a proper ideal, Int. Math. J. 3 (2003), 711-717.
- [5] J. M. Ancochea, R. Campoamor, 2-step solvable Lie algebras and weight graphs, Transf. Groups 7 (2002) 307-320.
- [6] J.M. Ancochea, R. Campoamor, L. García Vergnolle, Indecomposable Lie algebras with nontrivial Levi decomposition cannot have filiform radical, International Mathematical Forum, 1 (2006), 309-316.
- [7] J. M. Ancochea, M. Goze, Le rang du système linéaire des racines d'une algèbre de Lie rigide résoluble complexe, Comm. Algebra 20 (1992), 875-887.
- [8] J. M. Ancochea, M. Goze, On the classification of rigid Lie algebras, J. Algebra 245 (2001), 68-91.
- [9] J. M. Ancochea, M. Goze, On the nonrationality of rigid Lie algebras, Proc. Am. Math. Soc. 127 (1999), 2611-2618.
- [10] C.Benson, C. Gordon, Kähler and symplectic structures on nilmanifolds. Topology 27 (1988), 513-518.
- [11] R. Campoamor. A graph theoretical determination of solvable complete Lie algebras, Linear Alg. Appl. 372 (2003), 155-168.
- [12] R. Campoamor , Contractions of Lie Algebras and Generalized Casimir Invariants, Acta Phys. Pol. B 34 (2003) 3901-3918.
- [13] R. Campoamor, On invariants of some solvable rigid Lie algebras, J. Math. Phys. 44 (2003) 771-784.
- [14] R. Campoamor. Invariants of solvable rigid Lie algebras up to dimension 8, J. Phys. A : Math. Gen. 35 (2002), 6293-6306.
- [15] R. Campoamor, Some Remarks Concerning the Invariants of Rank One Solvable Real Lie Algebras, Algebra Colloquium 12 (2005) 497-518.
- [16] R. Campoamor, The structure of the invariants of perfect Lie algebras, J. Phys. A : Math. Gen. 36 (2003) 6709-6723.

- [17] R. Carles, Sur la structure des algèbres de Lie rigides, *Ann. Inst. Fourier* 34 (1984), 65-82.
- [18] R. Carles, Sur les suites d'algèbres de Lie de dérivations, *Arch. Math.* 70 (1998), 262-269.
- [19] Cavalcanti G., Gualtieri M., Generalized Complex Structures in Nilmanifolds. *J. Symplectic Geom.* 2, no. 3 (2004), 393-410.
- [20] A. Cerezo, Les algèbres de Lie nilpotentes réelles et complexes de dimension 6, Prépublications Université de Nice, 1983.
- [21] Chevalley C., The Algebraic Theory of Spinors and Clifford Algebras. Collected Works., volume 2. Springer Verlag (1996).
- [22] Cordero, Luis A. ; Fernández, M. ; Gray, A. Symplectic manifolds with no Kähler structure. *Topology* 25 (1986), 375-380.
- [23] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, Paris, 1974.
- [24] G. Favre, Système des poids sur une algèbre de Lie nilpotente, *Manuscripta Math.* 9 (1973), 53-90.
- [25] M. Favre, Algèbres de Lie complètes, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 274 (1972), 1533-1535.
- [26] L. García Vergnolle, Sur les algèbres de Lie quasi-filiformes admettant un tore de dérivations. *Manuscripta Math.* 124 (2007), 489-505.
- [27] J.R. Gómez, A. Jiménez-Merchán, Naturally graded quasi-filiform Lie algebras, *J. Algebra* 256 (2002) 221-228.
- [28] M. Goto, Note on a characterization of solvable Lie algebras, *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I* 26 (1962), 1-2.
- [29] M. Goze, Y. Hakimjanov, Sur les algèbres de Lie nilpotentes admettant un tore de dérivations, *Manuscripta Math.* 84 (1994) 115-124.
- [30] M. Goze, Remm E., Non existence of complex structures on filiform Lie algebras. *Comm. Algebra* 30 (2002), 3777-3788.
- [31] M. Goze, E. Remm, Valued Deformations of Algebras, *J. Alg. Appl.* 3 (2004), 345-365.
- [32] M. Gualtieri, Generalized Complex Geometry. arXiv :math/0401221v1 [math.DG].
- [33] Hitchin N., Generalized Calabi-Yau manifolds. *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 54 (2003), 281-308.
- [34] E. İnönü, E. P. Wigner, On the contraction of groups and their representations, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 39 (1953), 510-524.
- [35] B. S. Kruglikov, Symplectic and Contact Lie Algebras with an Application to Monge-Ampère Equations, *Proc. Steklov Math. Inst.* 221 (1998), 232.
- [36] A. I. Mal'cev, Solvable Lie algebras, *Izv. Akad. Nauk SSSR* 9 (1945), 329-356.
- [37] G. B. Mubarakzyanov, Klassifikaciya razreshimyykh algebr Li shestovo poryadka s odnim nenil'potentim bazisnym elementom, *Izv. Vyssh. Ucheb. Zaved. Mat.* 35 (1963), 104-116.
- [38] G. B. Mubarakzyanov, Nekotorye teoremy o razreshimyykh algebrakh Li, *Izv. Vyssh. Ucheb. Zaved. Mat.* 55 (1966), 95-98.
- [39] G. B. Mubarakzyanov. O razreshimyykh algebrakh Li, *Izv. Vyssh. Ucheb. Zaved. Mat.* 32 (1963), 114-123.
- [40] G.M. Mubarakzyanov, Klassifikaciya razreshimyykh algebr Lie shestovo poryadka s odnim nenilpotentym bazisnym elementom, *Izv. Vyssh. Ucheb. Zaved. Mat.* 35 (1963) 104-116.

- [41] J. Ndogmo, P. Winternitz, Generalized Casimir operators of solvable Lie algebras with Abelian nilradicals J. Phys. A 27(1994) 2787-2800.
- [42] A. Nijenhuis, R. W. Richardson, Deformations of Lie algebra structures, J. Math. Mech. 17 (1967) 89-105.
- [43] G. Ovando, Invariant complex structures on solvable Lie Groups. Manuscripta Math. 103 (2000), 19-30.
- [44] A. L. Onishchik, E. B. Vinberg, Lie Groups and Lie Algebras III, Springer Verlag (1994).
- [45] G. Reeb, Sur certaines propriétés topologiques des trajectoires des systèmes dynamiques. Mem. Acad. Sci. Bruxelles 27 (1952) 1-65.
- [46] S.M. Salamon, Complex structure on nilpotent Lie algebras. J. Pure Appl. Algebra, 157 (2001), 311-333.
- [47] E. Schenkman, A theory of subinvariant Lie algebras, Amer. J. Math., 73 (1951), 453-474.
- [48] L. Šnobl, P. Winternitz, A class of solvable Lie algebras and their Casimir invariants, J. Phys. A 38 (2005) 2687-2700.
- [49] P. Turkowski, Structure of real Lie algebras, Linear Alg. Appl. 171 (1992), 192-212.
- [50] P. Turkowski, Solvable Lie algebras of dimension six, J. Math. Phys. 31 (1990) 1344-1350.
- [51] M. Vergne, Cohomologies des algèbres de Lie nilpotentes. Application à l'étude de la variété des algèbres de Lie nilpotentes, Bull. Soc. Math. France 98 (1970) 81-116.
- [52] Zhu Lin Sheng, Daoji Meng, Solvable complete Lie algebras I. Communications in algebra, 24(13) (1996), 4181-4197.
- [53] Zhu Lin Sheng, Daoji Meng, Solvable complete Lie algebras II. Algebra Colloquium (1998), 289-296.

Annexe :
Contractions d'algèbres de Jordan
en dimension 2

Contractions d'algèbres de Jordan en dimension 2

J.M. Ancochea Bermúdez, R. Campoamor-Stursberg^{*},
L. García Vergnolle¹, J. Sánchez Hernández

Dpto. Geometría y Topología, Facultad CC. Matemáticas U.C.M., Plaza de Ciencias 3, E-28040 Madrid, Spain

Reçu le 17 janvier 2007

Disponible sur Internet le 24 janvier 2008

Communiqué par Efim Zelmanov

Résumé

On détermine les classes d'isomorphisme des algèbres de Jordan en dimension deux sur le corps des nombres réels. En utilisant des techniques d'Analyse Non Standard, on étudie les propriétés de la variété des lois d'algèbres de Jordan, et aussi les contractions parmi ces algèbres.

© 2008 Elsevier Inc. Tous droits réservés.

Mots-clés : Algèbre de Jordan ; Rigidité ; Contraction

1. Définitions et propriétés préliminaires

Le but de ce travail c'est d'étudier certaines propriétés de la variété des lois d'algèbres de Jordan en dimension 2. D'abord, on classe ces algèbres sur le corps des nombres réels, et on introduit la notion de perturbation d'algèbres de Jordan en utilisant la théorie des ensembles internes de Nelson [7]. Ceci, nous permet de déterminer les composantes ouvertes de la variété J^2 , d'où en résulte que la variété est formée par trois composantes, deux de dimension 4 et une de dimension 2. Les autres algèbres résultent de limites par contraction des algèbres rigides définissant les composantes ouvertes.

^{*} Auteur correspondant.

Adresses e-mail : ancochea@mat.ucm.es (J.M. Ancochea Bermúdez), rutwig@mat.ucm.es (R. Campoamor-Stursberg), lucigarcia@mat.ucm.es (L. García Vergnolle).

¹ Le troisième auteur (L.G.V.) remercie la Fundación Ramón Areces qui finance sa bourse prédoctorale.

Définition 1. Une loi d'algèbre de Jordan sur \mathbb{R} est une application bilinéaire symétrique $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui vérifie l'identité

$$\varphi(\varphi(X, X), \varphi(X, Y)) - \varphi(X, \varphi(\varphi(X, X), Y)) = 0, \quad X, Y \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

On désignera par J^n l'ensemble des lois d'algèbres de Jordan sur \mathbb{R}^n .

On appelle algèbre de Jordan de dimension n a toute paire (\mathbb{R}^n, φ) , où $\varphi \in J^n$. De façon naturelle, on peut aussi définir les notions d'idéal et sous-algèbre d'une algèbre de Jordan [6].

Rappelons qu'un sous-espace vectoriel V est dit isotrope s'il existe un vecteur non nul v tel que $\varphi(v, w) = 0$ pour tout $w \in V$. Si le sous-espace $\mathbb{R}v$ est lui même isotrope, on dit que v est un vecteur isotrope.

Définition 2. Une algèbre de Jordan sans éléments isotropes est dite simple si elle ne possède pas d'idéaux non nuls.

Proposition 1. Toute sous-algèbre d'une algèbre de Jordan sans éléments isotropes possède un élément unité.

Voir [9] pour le détail de la démonstration.

Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de \mathbb{R}^n . On peut identifier toute algèbre de Jordan φ avec ses constantes de structure sur une base donnée. De l'identité (1) on obtient que les coordonnées définies par $\varphi(e_i, e_j) = a_{ij}^k e_k$ sont des solutions du système :

$$a_{ii}^h a_{kj}^l a_{lk}^r - a_{ii}^h a_{jk}^l a_{lh}^r - 2a_{ij}^h a_{ik}^l a_{hl}^r + 2a_{il}^r a_{hj}^l a_{ik}^h = 0, \quad 1 \leq i, j, k, l, r, h \leq n. \quad (2)$$

2. Classification des algèbres de Jordan réelles en dimension 2

Dans le cas particulier de dimension 2, toute algèbre de Jordan est donnée par les relations :

$$\begin{aligned} e_1 \circ e_1 &= a_1 e_1 + a_2 e_2, \\ e_2 \circ e_2 &= b_1 e_1 + b_2 e_2, \\ e_1 \circ e_2 &= c_1 e_1 + c_2 e_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Cette dimension a été déjà considérée dans [1] d'un point de vue géométrique, et dans [10] pour des applications aux équations différentielles. On peut donc exprimer la structure par une matrice de coefficients du type

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$$

En développant le système (2), on obtient les douze équations suivantes :

$$\begin{aligned}
a_2(c_1c_2) &= a_2(a_2b_1), \\
b_1(c_1c_2) &= b_1(a_2b_1), \\
a_2(a_1b_1 + b_2c_1) &= a_2(b_1c_2 + c_1^2), \\
b_1(a_1b_1 + b_2c_1) &= b_1(b_1c_2 + c_1^2), \\
a_2(a_2c_1 + c_2^2) &= a_2(a_1c_2 + a_2b_2), \\
b_1(a_2c_1 + c_2^2) &= b_1(a_1c_2 + a_2b_2), \\
a_1c_1c_2 + 2a_2b_1c_2 &= 2c_1c_2^2 + a_1a_2b_1, \\
a_1a_2c_1 + 3a_1c_2^2 + 2a_2b_2c_2 &= 2a_2c_1c_2 + 2c_2^3 + a_1^2c_2 + a_1a_2b_2, \\
2c_1^2c_2 + 2b_1c_2^2 + a_1^2b_1 + a_1b_2c_1 &= 3a_1b_1c_2 + 2b_2c_1c_2 + a_1c_1^2, \\
2c_1c_2^2 + 2a_2c_1^2 + a_1b_2c_2 + a_2b_2^2 &= b_2c_2^2 + 2a_1c_1c_2 + 3a_2b_2c_1, \\
2a_1b_1c_1 + 3b_2c_1^2 + b_1b_2c_2 &= a_1b_1b_2 + b_2^2c_1 + 2c_1^3 + 2b_1c_1c_2, \\
2a_2b_1c_1 + b_2c_1c_2 &= a_2b_1b_2 + 2c_1^2c_2.
\end{aligned} \tag{4}$$

Il en résulte que J^2 est une variété algébrique plongée dans \mathbb{R}^6 .

Théorème 1. *Toute algèbre de Jordan réelle de dimension 2 est isomorphe à une des algèbres suivantes :*

1. $\psi_0: \quad e_1 \circ e_1 = e_1, \quad e_2 \circ e_2 = e_1, \quad e_1 \circ e_2 = e_2.$
2. $\psi_1: \quad e_1 \circ e_1 = e_1, \quad e_2 \circ e_2 = 0, \quad e_1 \circ e_2 = e_2.$
3. $\psi_2: \quad e_1 \circ e_1 = 0, \quad e_2 \circ e_2 = e_2, \quad e_1 \circ e_2 = 0.$
4. $\psi_3: \quad e_1 \circ e_1 = e_2, \quad e_2 \circ e_2 = 0, \quad e_1 \circ e_2 = 0.$
5. $\psi_4: \quad e_1 \circ e_1 = e_1, \quad e_2 \circ e_2 = 0, \quad e_1 \circ e_2 = \frac{1}{2}e_2.$
6. $\psi_5: \quad e_1 \circ e_1 = e_1, \quad e_2 \circ e_2 = -e_1, \quad e_1 \circ e_2 = e_2.$

De plus, l'algèbre ψ_5 est une algèbre de Jordan simple.

Dans ce qui suit, le symbole ψ_i désignera les algèbres du théorème.

Si φ est une algèbre de Jordan sans éléments isotropes, d'après la proposition 1, il existe un élément unité. On peut trouver alors une base de \mathbb{R}^2 telle que la matrice de φ soit de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Soit $x = x_1e_1 + x_2e_2$ un élément générique. Alors

$$\varphi(x, x) = (x_1^2 + ax_2^2)e_1 + (2x_1x_2 + bx_2^2)e_2.$$

Si l'algèbre de Jordan φ n'a pas d'éléments isotropes, l'équation précédente équivaut à la condition

$$b^2 + 4a \neq 0. \tag{6}$$

Lemme 1. *Toute algèbre de Jordan $\varphi \in J^2$ sans isotropie est isomorphe à ψ_0 ou ψ_5 .*

Démonstration. Si φ ne possède pas d'isotropie, on peut trouver une base $\{e_1, e_2\}$ telle que la loi s'exprime par la matrice (5) avec $4a + b^2 \neq 0$.

1. Si $4a + b^2 > 0$, on prend dans ψ_0 le changement de base $e'_1 = e_1, e'_2 = \frac{b}{2}e_1 + \sqrt{a + \frac{b^2}{4}}e_2$, et sur cette base on obtient :

$$e'_1 \circ e'_1 = e'_1, \quad e'_2 \circ e'_2 = ae'_1 + be'_2, \quad e'_1 \circ e'_2 = e'_2.$$

2. Si $4a + b^2 < 0$, on prend dans ψ_5 le changement de base $e'_1 = e_1, e'_2 = \frac{b}{2}e_1 + \sqrt{-(a + \frac{b^2}{4})}e_2$. Les relations sur la base transformée sont alors

$$e'_1 \circ e'_1 = e'_1, \quad e'_2 \circ e'_2 = ae'_1 + be'_2, \quad e'_1 \circ e'_2 = e'_2.$$

D'où le résultat. \square

Lemme 2. *Toute algèbre de Jordan de dimension 2 avec isotropie et élément unité est isomorphe à ψ_1 .*

Sans perte de généralité on peut supposer que e_1 est l'élément unité et e_2 l'élément isotrope. Alors

$$e_1 \circ e_1 = e_1, \quad e_2 \circ e_2 = 0, \quad e_1 \circ e_2 = e_2.$$

Lemme 3. *Soit $\varphi \in J^2$ une algèbre de Jordan avec isotropie sans élément unité. Alors φ est isomorphe à ψ_2, ψ_3 ou ψ_4 .*

Démonstration. Si φ est sans unité et isotrope, on peut trouver une base $\{e_1, e_2\}$ telle que les relations soient données par

$$e_1 \circ e_1 = a_1e_1 + a_2e_2, \quad e_2 \circ e_2 = 0, \quad e_1 \circ e_2 = c_1e_1 + c_2e_2.$$

Le système d'équations (4) est réduit aux relations

$$c_1 = 0, \quad a_2c_2^2 = a_1a_2c_2, \quad 3a_1c_2^2 = 2c_2^3 + a_1^2c_2.$$

On obtient deux possibilités non-équivalentes :

1. $\varphi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a_1, a_2 \in \mathbb{R},$
2. $\varphi = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_1}{2} \end{pmatrix}, a_1 \in \mathbb{R}.$

Dans le premier cas, si $a_1 \neq 0$, le changement de base $e'_1 = e_2$, $e'_2 = \frac{1}{a_1}(e_1 + \frac{a_2}{a_1}e_2)$ montre que

$$e'_1 \circ e'_1 = e'_1, \quad e'_2 \circ e'_2 = ae'_1 + be'_2, \quad e'_1 \circ e'_2 = e'_2,$$

d'où $\varphi \simeq \psi_2$. Si $a_1 = 0$, on considère le changement $e'_1 = \frac{1}{\sqrt{|a_2|}}e_1$, $e'_2 = e_2$.

Pour le deuxième cas, il suffit de considérer le changement de base donné par $e'_1 = \frac{1}{a_1}e_1$, $e'_2 = e_2$ pour obtenir l'isomorphisme $\varphi \simeq \psi_4$.

Pour finir la preuve du théorème, il suffit de voir que ψ_5 est simple. On peut facilement vérifier que ψ_5 ne possède pas d'idéaux propres non triviaux. \square

Remarque 1. Il en résulte que sur le corps des nombres complexes, les algèbres de Jordan ψ_5 et ψ_0 sont isomorphes. On obtient alors un exemple d'une algèbre simple dont la complexifiée n'est pas simple.

Si on considère l'action du groupe linéaire $GL(2, \mathbb{R})$ sur la variété J^2 , cette action est définie par :

$$(\varphi, f) = f^{-1} \circ \varphi \circ (f, f).$$

On notera par $\mathcal{O}(\varphi)$ l'orbite d'un élément φ par cette action. Les éléments de l'orbite sont évidemment les algèbres de Jordan isomorphes à φ .

3. Perturbations d'algèbres de Jordan

Dans ce paragraphe, on applique la théorie des ensembles internes (I.S.T) de Nelson [7] à l'analyse de la variété J^2 .² Dans ce qui suit, on suppose que n est standard, d'où on en déduit que la variété J^n est standard. Soient $\varphi \in J^n$ un élément standard et x, y deux vecteurs standard de \mathbb{R}^n . Alors $\varphi(x, y)$ est standard. Si ces deux vecteurs sont limités, alors $\varphi(x, y)$ est aussi limité.

Définition 3. Soit φ une loi standard de J^n . Une perturbation φ_0 de φ est une loi d'algèbre de Jordan sur \mathbb{R}^n infiniment proche à φ , c'est-à-dire, pour tous les vecteurs standards x et y infiniment, $\varphi(x, y)$ et $\varphi_0(x, y)$ sont infiniment proches. On notera une perturbation par $\varphi \sim \varphi_0$.

Définition 4. Pour tout élément limité x de \mathbb{R}^n (n standard), il existe un unique standard, noté 0x , tel que $x \sim {}^0x$. On appellera 0x l'ombre de x .

Proposition 2. Soit $\varphi \in J^n$ tel que $\varphi(x, y)$ soit limité pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ limité. Alors $\varphi_0 \sim \varphi \in J^n$.

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. Comme φ est une loi d'algèbre de Jordan, on a

$$\varphi(\varphi(x, x), \varphi(x, y)) - \varphi(x, \varphi(\varphi(x, x), y)) = 0.$$

² On peut également consulter le livre [5] pour des applications précises de l'analyse non-standard aux algèbres de Lie. Une approche plus moderne purement algébrique peut être trouvée dans les articles [3,4].

Comme chaque partie est limitée, en considérant l'ombre on obtient

$$\varphi_0({}^o\varphi(x, x), {}^o\varphi(x, y)) - \varphi_0(x, {}^o\varphi(\varphi(x, x), y)) = 0,$$

alors

$$\varphi_0(\varphi_0(x, x), \varphi_0(x, y)) - \varphi_0(x, \varphi_0({}^o\varphi(x, x), y)) = 0,$$

et appliquant une fois de plus les propriétés de l'ombre en agissant sur les applications linéaires, il en résulte que

$$\varphi_0(\varphi_0(x, x), \varphi_0(x, y)) - \varphi_0(x, \varphi_0(\varphi_0(x, x), y)) = 0. \quad \square$$

Lemme 4. Soit V un espace vectoriel de \mathbb{R}^n (n standard). Alors l'ombre oV est un sous-espace de \mathbb{R}^n de la même dimension.

Démonstration. D'après [5], oV est le seul sous-ensemble standard de \mathbb{R}^n dont les éléments sont des ombres des éléments limités de V . Comme l'addition et la multiplication externe par des scalaires sont continues, oV est un sous-espace vectoriel. La méthode d'orthogonalisation de Graam–Schmidt nous donne une base orthogonale de V . Même si cette base n'est pas généralement standard, leurs vecteurs sont limités et admettent une ombre de norme 1. Comme ces ombres sont orthogonales, on en déduit que V et oV ont la même dimension. \square

Comme conséquence immédiate de ce résultat on obtient le résultat suivant :

Proposition 3. Soit φ_0 une loi standard de J^n et soit φ une perturbation de φ_0 . Alors l'ombre d'une sous-algèbre (respectivement un idéal) de (\mathbb{R}^n, φ) est une sous-algèbre (respectivement un idéal) de $(\mathbb{R}^n, \varphi_0)$ de la même dimension.

Lemme 5. Dans les conditions précédentes, si $(\mathbb{R}^n, \varphi_0)$ est sans isotropie, alors la perturbation (\mathbb{R}^n, φ) est aussi sans isotropie.

Démonstration. Comme $(\mathbb{R}^n, \varphi_0)$ est une algèbre de Jordan standard sans isotropie, pour tout $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ standard, $\varphi_0(x, x)$ est standard non nul et vérifie

$$\varphi(x, x) \sim \varphi_0(x, x).$$

On en conclut que pour tout standard non nul la relation $\varphi(x, x) \neq 0$ est satisfaite. Par continuité de φ , la même propriété est valable pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ qui ne soit pas infiniment petit. Pour $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ on considère $\frac{x}{\|x\|}$, qui est limité non infiniment petit. Alors

$$\varphi\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right) \neq 0,$$

et par bilinéarité

$$\frac{\varphi(x, x)}{\|x\|^2} \neq 0,$$

d'où $\varphi(x, x) \neq 0$. \square

Proposition 4. Soit φ une perturbation de la loi d'algèbre de Jordan standard φ_0 sur \mathbb{R}^n . Si $G_0 = (\mathbb{R}^n, \varphi_0)$ est simple, alors $G = (\mathbb{R}^n, \varphi)$ est simple.

Démonstration. D'après le lemme 5, G est sans isotropie. Si I est un idéal propre de G , alors ${}^o I$ est un idéal de G_0 de la même dimension. En particulier, si G_0 est simple, ceci implique que ${}^o I$ est réduit à zéro, d'où la simplicité de G . \square

Définition 5. Une algèbre de Jordan standard φ_0 est dite rigide si toute perturbation est isomorphe à φ_0 .

Cette définition est la traduction au langage non-standard de la notion classique de rigidité. En effet, si toute perturbation de φ_0 est isomorphe à φ_0 , le halo de φ_0 est contenu dans l'orbite $\mathcal{O}(\varphi_0)$. Ceci implique que l'orbite est ouverte, et par le principe de transfert, on obtient l'équivalence.

Exemple 1. Soit $\psi_0 \in J^2$ la loi de Jordan définie dans le théorème 1. Il existe alors une base $\{e_1, e_2\}$ sur laquelle la loi est donnée par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considérons une perturbation $\varphi \in J^2$ de ψ_0 , dans cette même base elle est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 1 + \epsilon_1 & \epsilon_2 \\ 1 + \epsilon_3 & \epsilon_4 \\ \epsilon_5 & 1 + \epsilon_6 \end{pmatrix},$$

où les $\epsilon_1, \dots, \epsilon_6$ sont infiniment petits.

En faisant le changement de variables $e'_1 = \frac{1}{1+\epsilon_6} e_1$, $e'_2 = e_2$, on peut supposer que φ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 + \epsilon_1 & \epsilon_2 \\ 1 + \epsilon_3 & \epsilon_4 \\ \epsilon_5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si on impose les équations qui définissent la variété J^2 , on obtient la condition :

$$\epsilon_5 = \epsilon_2(1 + \epsilon_3). \quad (7)$$

Par ailleurs, comme ψ_0 est sans isotropie, φ l'est aussi et possède un élément unité, d'après [9] de la forme $\alpha e'_1 + \beta e'_2$ qui vérifie :

$$\begin{aligned} \varphi(e'_1, \alpha e'_1 + \beta e'_2) &= e'_1, \\ \varphi(e'_2, \alpha e'_1 + \beta e'_2) &= e'_2, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
1 &= \alpha(1 + \epsilon_1) + \beta\epsilon_5, \\
0 &= \alpha\epsilon_2 + \beta, \\
0 &= \alpha\epsilon_5 + \beta(1 + \epsilon_3), \\
1 &= \alpha + \beta\epsilon_4.
\end{aligned} \tag{8}$$

En remplaçant (7) dans la troisième équation de (8) puis β dans la quatrième, le système est réduit à :

$$\begin{aligned}
0 &= \beta + \alpha\epsilon_2, \\
1 &= \alpha(1 - \epsilon_2\epsilon_4).
\end{aligned}$$

On en déduit $\alpha \sim 1$ et $\beta \sim 0$. Dans la base $\{\alpha e'_1 + \beta e'_2, e'_2\}$, on peut alors trouver ϵ et ϵ' infiniment petits tels que φ soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 + \epsilon & \epsilon' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $(\epsilon')^2 + 4(1 + \epsilon) > 0$, φ est isomorphe à ψ_0 . On en conclut donc que ψ_0 est rigide.

Les algèbres de Jordan rigides sont donc d'un grand intérêt pour l'étude de la variété des lois, parce que les orbites sont des composantes ouvertes, et la clôture donne des composantes algébriques de la variété.³

Soit $\varphi_0 \in J^n$ une loi standard. Soient $\text{Id} \in GL(n, \mathbb{R})$ et $f \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ standard. Pour tout ε infiniment petit, l'endomorphisme $\text{Id} + \varepsilon f$ appartient au groupe $GL(n, \mathbb{R})$, et alors

$$(\text{Id} + \varepsilon f)^{-1} \varphi_0((\text{Id} + \varepsilon f), (\text{Id} + \varepsilon f)) = \varphi_0 + \varepsilon(\delta_{\varphi_0} f) + \varepsilon^2(\Delta(\varphi_0, f, \varepsilon)),$$

où

$$\delta_{\varphi_0} f(x, y) := \varphi_0(f(x), y) + \varphi_0(x, f(y)) - f(\varphi_0(x, y)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Comme l'ombre de la droite qui joint φ_0 et un point infiniment proche φ'_0 est une droite tangente à l'orbite $\mathcal{O}(\varphi_0)$ en φ_0 , l'espace tangent est donné par

$$T_{\varphi_0} \mathcal{O}(\varphi_0) = \{\delta_{\varphi_0} f : f \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})\}.$$

Exemple 2. Soit φ_0 une loi standard sans isotropie. D'après la classification, on peut trouver une base $\{e_1, e_2\}$ sur laquelle la loi est donnée par la matrice

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \psi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

³ Dans ce sens, on trouve des analogies avec la théorie des algèbres de Lie [2].

En prenant un élément $f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ on trouve que

$$\begin{aligned}\delta_{\psi_0} f(e_1, e_1) &= ae_1 + be_2, \\ \delta_{\psi_0} f(e_2, e_2) &= (2d - a)e_1 + (2c - b)e_2, \\ \delta_{\psi_0} f(e_1, e_2) &= be_1 + ae_2,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\delta_{\psi_5} f(e_1, e_1) &= ae_1 + be_2, \\ \delta_{\psi_5} f(e_2, e_2) &= (-2d + a)e_1 + (2c + b)e_2, \\ \delta_{\psi_5} f(e_1, e_2) &= -be_1 + ae_2,\end{aligned}$$

et pourtant

$$T_{\psi_0} f = \begin{pmatrix} a & b \\ 2d - a & 2c - b \end{pmatrix}, \quad T_{\psi_5} f = \begin{pmatrix} a & b \\ -2d + a & 2c + b \end{pmatrix}.$$

La dimension des orbites sont en conséquence $\dim \mathcal{O}(\psi_0) = \dim \mathcal{O}(\psi_5) = 4$. Comme ces algèbres sont rigides, on trouve que la variété J^2 possède deux composantes ouvertes de dimension 4.

3.1. Théorème de décomposition d'un point

Dans ce paragraphe, on énonce un résultat de M. Goze [2] concernant la rigidité des lois d'algèbres non-associatives. Ceci admet une application naturelle aux algèbres de Jordan.

Théorème 2. Soit M_0 un point standard de \mathbb{R}^n avec n standard. Tout point M infiniment proche de M_0 admet une décomposition de la forme

$$M = M_0 + \epsilon_1 v_1 + \epsilon_1 \epsilon_2 v_2 + \cdots + \epsilon_1 \dots \epsilon_p v_p$$

qui vérifie les conditions

1. $\epsilon_1, \dots, \epsilon_p$ sont des nombres réels infiniment petits.
2. v_1, \dots, v_p sont des vecteurs standard de \mathbb{R}^n linéairement indépendants.

De plus, si

$$M = M_0 + \epsilon'_1 v'_1 + \epsilon'_1 \epsilon'_2 v'_2 + \cdots + \epsilon'_1 \dots \epsilon'_q v'_q$$

est une autre décomposition de M qui vérifie les conditions précédentes, alors $p = q$, et

1. $v'_i = \sum_{j=1}^i a_i^j v_j$ dont les a_i^j sont des nombres standard pour tout i, j telles que $a_i^i \neq 0$.
2. $\epsilon_1 \dots \epsilon_i = a_i^i \epsilon'_1 \dots \epsilon'_i + a_{i+1}^i \epsilon'_1 \dots \epsilon'_{i+1} + \cdots + a_p^i \epsilon'_1 \dots \epsilon'_p$.

Le nombre entier p qui décrit la classe d'équivalence d'un point M est appelé longueur de M .

Remarque 2. Le théorème nous donne, en partant des points (M, M_0) de \mathbb{R}^n , avec M_0 standard infiniment proche à M , un repère standard (v_1, \dots, v_n) tel que le drapeau $(v_1, (v_1, v_2), \dots, (v_1, \dots, v_n))$ soit complètement déterminé. Si on impose que M et M_0 sont des points appartenant à une variété différentielle ou algébrique plongée dans \mathbb{R}^n , la référence antérieure s'adapte à la géométrie tangente en M_0 . En particulier, v_1 est un vecteur tangent à l'orbite [2].

3.2. Rigidité des lois d'algèbres de Jordan

Soit φ une perturbation de la loi standard $\varphi_0 \in J^n$. Alors on peut décomposer φ comme [2] :

$$\varphi = \varphi_0 + \epsilon_1 \varphi_1 + \epsilon_1 \epsilon_2 \varphi_2 + \dots + \epsilon_1 \dots \epsilon_p \varphi_p, \quad (9)$$

où ϵ_i sont des nombres infinitésimaux et $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ sont des applications bilinéaires standard indépendantes de \mathbb{R}^n . Il en résulte que $\varphi \in J^n$ si et seulement si

$$\begin{aligned} \delta_{\varphi_0} \varphi_1 &= 0, \\ \epsilon_2 \delta_{\varphi_0} \varphi_2 + \epsilon_1 \delta_{\varphi_1} \varphi_0 + \epsilon_1^2 \varphi_1^3 + \epsilon_1 \epsilon_2 \delta_{\varphi_1} \varphi_3 + \epsilon_1^2 \epsilon_2 \delta_{\varphi_1} \varphi_2 \\ &+ \epsilon_1 \epsilon_2^2 \delta_{\varphi_2} \varphi_1 + \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) + \dots \\ &+ \epsilon_1^2 \epsilon_2^3 \epsilon_3^3 \dots \epsilon_{p-1}^2 \delta_{\varphi_p} \varphi_{p-1} + \epsilon_1^2 \epsilon_2^3 \epsilon_3^3 \dots \epsilon_p^3 \varphi_p^3 = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

où

$$\begin{aligned} \varphi_i \circ \varphi_j \circ \varphi_k(X, Y) &= \varphi_i(\varphi_j(X, X), \varphi_k(X, Y)) - \varphi_i(X, \varphi_j(\varphi_k(X, X), Y)), \\ \varphi_i^3 &= \varphi_i \circ \varphi_i \circ \varphi_i, \\ (\varphi_i, \varphi_j, \varphi_k) &= \varphi_i \circ \varphi_j \circ \varphi_k + \varphi_j \circ \varphi_k \circ \varphi_i + \varphi_k \circ \varphi_i \circ \varphi_j \\ &+ \varphi_i \circ \varphi_k \circ \varphi_j + \varphi_j \circ \varphi_i \circ \varphi_k + \varphi_k \circ \varphi_j \circ \varphi_i, \\ \delta_{\varphi_i} \varphi_j &= \varphi_i(\varphi_i(X, X), \varphi_j(X, Y)) + \varphi_i(\varphi_j(X, X), \varphi_i(X, Y)) \\ &+ \varphi_j(\varphi_i(X, X), \varphi_i(X, Y)) - \varphi_j(X, \varphi_i(\varphi_i(X, X), Y)) \\ &- \varphi_i(X, \varphi_j(\varphi_i(X, X), Y)) - \varphi_i(X, \varphi_i(\varphi_j(X, X), Y)). \end{aligned} \quad (11)$$

En effet, en substituant la décomposition (9) dans (1), en divisant par ϵ_1 ($\epsilon_1 \neq 0$ car $\varphi \neq \varphi_0$) et en considérant l'ombre on obtient (10). On désignera par $G(\varphi_0)$ l'espace vectoriel

$$G(\varphi_0) = \{\varphi \in \mathbb{R}^{\frac{n^2+n^3}{2}} : \delta_{\varphi_0} \varphi = 0\}. \quad (12)$$

Lemme 6. Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in J^n$. Le plan engendré par $\{0, \varphi_1, \varphi_2\}$ est contenu dans J^n si et seulement si $\delta_{\varphi_1} \varphi_2 = \delta_{\varphi_2} \varphi_1 = 0$.

Démonstration. Soit $\varphi = \lambda \varphi_1 + \mu \varphi_2$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

$$\varphi(\varphi(x, x), \varphi(x, y)) - \varphi(x, \varphi(\varphi(x, x), y)) = \lambda^2 \mu \delta_{\varphi_1} \varphi_2(x, y) + \mu^2 \lambda \delta_{\varphi_2} \varphi_1(x, y),$$

d'où l'affirmation. \square

Proposition 5. Si $\psi_4 \in J^2$ est telle qu'il existe une base $\{e_1, e_2\}$ de \mathbb{R}^2 dont la loi est donnée par la matrice

$$\psi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

alors ψ_4 est rigide. De plus, $\dim \mathcal{O}(\psi_4) = 2$.

Démonstration. Par transfert, il suffit de démontrer la proposition pour φ_0 et $\{e_1, e_2\}$ standard. Soit φ une perturbation de φ_0 et

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon_1 \varphi_1 + \cdots + \varepsilon_1 \dots \varepsilon_6 \varphi_6$$

la décomposition correspondante. Soit

$$G(\varphi_0) = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si $\varphi_1 \in G(\varphi_0)$, alors on a $\delta_{\varphi_1} \varphi_0 = 0$. D'après le lemme, il en résulte que $\varphi_1 \in J^2$ et pourtant $\varphi_1^3 = 0$. Si on divise la deuxième équation de (10) par ε_2 , en passant à l'ombre on obtient que $\varphi_2 \in G(\varphi_0)$. Le même raisonnement nous montre que $\varphi_2^3 = 0$, $\delta_{\varphi_1} \varphi_2 = \delta_{\varphi_2} \varphi_0 = \delta_{\varphi_2} \varphi_1 = 0$ et $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) = 0$. En divisant maintenant par ε_3 , la méthode montre que $\varphi_3 \in G(\varphi_0)$. Pourtant, on obtient que toute perturbation est au plus de longueur 2. Par ailleurs, dans la base $\{e_1, e_2\}$ cette perturbation s'écrit comme

$$\begin{pmatrix} 1 + \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon' \\ \frac{\varepsilon'}{2} & \frac{1 + \varepsilon}{2} \end{pmatrix}.$$

Le changement de base donné par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-\varepsilon'}{1 + \varepsilon} & 1 + \varepsilon \end{pmatrix}$$

nous donne l'isomorphisme cherché.

Théorème 3. L'algèbre de Jordan $\psi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne se perturbe pas sur $\psi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En particulier, ψ_5 ne se contracte pas sur ψ_2 .

Démonstration. On considère la perturbation $\varphi = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & 1 + \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 & \varepsilon_6 \end{pmatrix}$ de ψ_2 , où $\varepsilon_i \sim 0$ sont des infinitésimaux. Le changement $e'_2 = \frac{1}{1 + \varepsilon_4} e_2$ permet de supposer que $\varepsilon_4 = 0$. Si $\varepsilon_5 \neq 0$, l'équation (4) implique la relation

$$\varepsilon_5 (2\varepsilon_1 \varepsilon_3 + 3\varepsilon_5 - 1 - 2\varepsilon_5^2 - 2\varepsilon_3 \varepsilon_6) = \varepsilon_3 (\varepsilon_1 - \varepsilon_6).$$

Comme $\epsilon_5 \neq 0$, cela équivaut à

$$-1 \sim 2\epsilon_1\epsilon_3 + 3\epsilon_5 - 1 - 2\epsilon_5^2 - 2\epsilon_3\epsilon_6 = \frac{\epsilon_3}{\epsilon_5}(\epsilon_1 - \epsilon_6).$$

Comme $\epsilon_1 - \epsilon_6 \sim 0$, le nombre $\frac{\epsilon_3}{\epsilon_5}$ est infiniment grand, d'où $\frac{\epsilon_5}{\epsilon_3} \sim 0$. Le changement de base

$$e'_1 = e_1 - \frac{\epsilon_5}{\epsilon_3}e_2 \sim e_1, \quad e'_2 = \lambda e_2, \quad \lambda \sim 1,$$

permet de supposer que $\epsilon_5 = 0$. Si $\epsilon_3 \neq 0$, le système (4) implique les relations $\epsilon_2 = 0$ et $\epsilon_1 = \epsilon_6$. Il faut distinguer deux cas :

1. Si $\epsilon_1 \neq 0$, on considère la base donnée par

$$e''_1 = \frac{1}{\epsilon_1}e'_1, \quad e''_1 = e'_2.$$

Il en résulte que

$$e''_1 \circ e''_1 = e''_1, \quad e''_2 \circ e''_2 = \epsilon_1\epsilon_3e''_1 + e''_2, \quad e''_2 \circ e''_2 = e''_2,$$

et comme $\epsilon_1\epsilon_3 + \frac{1}{4} > 0$, la perturbation est isomorphe à ψ_0 d'après le lemme 1.

2. Si $\epsilon_1 = 0$, la perturbation est isomorphe à ψ_2 . Ceci résulte immédiatement de la classification.

Si $\epsilon_3 = 0$, alors la loi de la perturbation est donnée par $\varphi = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_2 \\ 0 & 1 \\ 0 & \epsilon_6 \end{pmatrix}$. Dans ce cas, $I = (e'_2)$ est un idéal de φ , et, par simplicité, la perturbation n'est pas isomorphe à ψ_5 . \square

Proposition 6. Les seules algèbres rigides dans J^2 sont ψ_0, ψ_4 et ψ_5 .

Démonstration. Soit $\varphi_0 \in J^2$ une loi standard non isomorphe à aucune des lois

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il existe une base standard $\{e_1, e_2\}$ de \mathbb{R}^2 telle que φ_0 s'exprime d'une des formes suivantes

$$(a) \quad \varphi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (b) \quad \varphi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (c) \quad \varphi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas (a), on obtient la perturbation φ donnée par

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

qui n'est pas isomorphe à ψ_0 parce que φ est sans isotropie. Si on est dans le cas (b), alors on considère la perturbation

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

qui est aussi sans isotropie, et pourtant non isomorphe à ψ_0 . Finalement, dans le cas (c) on peut considérer la perturbation $\varphi = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui n'est pas isomorphe à ψ_0 pour être sans isotropie. La rigidité de ψ_5 est évidente par simplicité. \square

4. Contractions d'algèbres de Jordan

Par analogie avec les algèbres de Lie, on peut définir formellement une notion de limite dans la variété des lois J^n de la façon suivante : Soit $\varphi \in J^n$ une loi d'algèbre de Jordan et soit $f_t \in GL(n, \mathbb{R})$ une famille d'endomorphismes non-singuliers dépendant du paramètre continu t . Si pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$ la limite

$$\varphi'(X, Y) := \lim_{t \rightarrow 0} f_t^{-1} \circ \varphi(f_t(X), f_t(Y)) \quad (13)$$

existe, alors φ' vérifie les conditions (1) et φ' est une loi d'algèbre de Jordan, appelée contraction de φ par $\{f_t\}$. En utilisant l'action du groupe $GL(n, \mathbb{R})$ sur la variété des lois d'algèbres de Jordan, c'est facile de voir qu'une contraction de φ correspond à un point de l'adhérence de l'orbite $\mathcal{O}(\varphi)$. Il en résulte en particulier que les algèbres rigides ne sont pas des contractions non triviales [8].

C'est évident que le changement de base $e'_i = te_i$, $i = 1, \dots, n$ induit une contraction de toute algèbre de Jordan sur l'algèbre de Jordan abélienne. De plus, toute contraction non-triviale $\varphi \rightarrow \varphi'$ vérifie l'inégalité suivante

$$\dim \mathcal{O}(\varphi) > \dim \mathcal{O}(\varphi'). \quad (14)$$

Ceci nous donne un premier critère pour classer les contractions des algèbres de Jordan. On peut vérifier sans difficulté que pour les algèbres du théorème 1, les dimensions des orbites sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{O}(\psi_5) &= \dim \mathcal{O}(\psi_0) = 4, \\ \dim \mathcal{O}(\psi_1) &= \dim \mathcal{O}(\psi_2) = 3, \\ \dim \mathcal{O}(\psi_3) &= \dim \mathcal{O}(\psi_4) = 2. \end{aligned} \quad (15)$$

Proposition 7. Soient ψ_i les algèbres de Jordan du théorème 1. Alors ψ_1, ψ_2 et ψ_3 sont les seules algèbres de Jordan qui apparaissent comme contraction d'une algèbre de Jordan. Plus précisément :

1. ψ_1 est une contraction des algèbres ψ_0 et ψ_5 ,
2. ψ_2 est une contraction de ψ_0 ,
3. ψ_3 est une contraction de ψ_0, ψ_1, ψ_2 et ψ_5 .

Démonstration. Comme les algèbres ψ_0 , ψ_4 et ψ_5 sont rigides, elles ne sont pas une contraction d'une autre algèbre de Jordan.

1. Soit dans ψ_5 la famille des transformations linéaires

$$f_t(e_1) = e_1, \quad f_t(e_2) = te_2.$$

Dans la base transformée $\{e'_1 = f_t(e_1), e'_2 = f_t(e_2)\}$, la loi de ψ_5 s'exprime par la matrice

$$\begin{pmatrix} e'_1 \circ e'_1 \\ e'_2 \circ e'_2 \\ e'_1 \circ e'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En appliquant la formule, on obtient que la limite pour $t \rightarrow 0$ de (13) donne une algèbre isomorphe à ψ_1 . De manière analogue, la contraction $\psi_0 \rightarrow \psi_1$ est définie par les transformations

$$f_t(e_1) = e_1, \quad f_t(e_2) = te_2.$$

2. En définissant les changements de base paramétrés

$$f_t(e_1) = te_1, \quad f_t(e_2) = \frac{1}{2}(e_1 + e_2),$$

on vérifie facilement que la limite (13) existe et donne une contraction $\psi_0 \rightarrow \psi_2$.

3. La contraction de ψ_5 sur ψ_3 est donnée par les transformations

$$f_t(e_1) = \frac{\sqrt{t}}{2}e_1 + \frac{\sqrt{t}}{2}e_2, \quad f_t(e_2) = te_1.$$

La contraction $\psi_1 \rightarrow \psi_3$ est définie par

$$f_t(e_1) = t(e_1 + e_2), \quad f_t(e_2) = t^2e_2.$$

La contraction $\psi_0 \rightarrow \psi_3$ est donnée par

$$f_t(e_1) = te_2, \quad f_t(e_2) = t^2e_1.$$

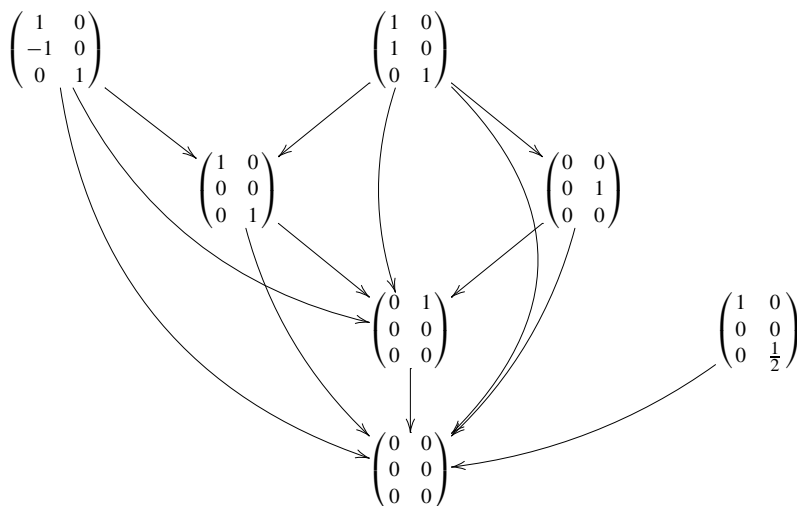
Finalement, les changements de base dans ψ_2 définis par

$$f_t(e_1) = e_1 + te_2, \quad f_t(e_2) = t^2e_2$$

induisent une contraction $\psi_2 \rightarrow \psi_3$.

L'algèbre ψ_4 , étant rigide, n'est pas une contraction des autres algèbres. Par ailleurs, cette algèbre ne possède que la contraction sur l'algèbre abélienne. \square

Dans la figure 1, on résume les contractions des algèbres de Jordan obtenues, et aussi la contraction canonique sur l'algèbre abélienne.

Fig. 1. Contraction des algèbres de Jordan de J^2 .

Remerciements

Les auteurs ont été soutenus par le projet de recherche MTM2006-09152 du Ministerio de Educación y Ciencia. Ils témoignent aussi leur gratitude à A. Elduque, M.K. Kinyon et P. Zismanovich pour leurs commentaires et interventions constructives lors de la rédaction de ce manuscrit.

Références

- [1] J.M. Ancochea Bermúdez, Sobre la variedad de leyes de álgebras de Jordan, Publ. IRMA 216 (1983) P-124.
- [2] M. Goze, Etude locale de la variété des lois d'algèbres de Lie, Thèse d'état, Mulhouse, 1982.
- [3] M. Goze, Perturbations sur une variété algébrique; application à l'étude locale de la variété des lois d'algèbres de Lie sur C^n , C. R. Acad. Sci. Paris 295 (1982) 583–586;
M. Goze, Perturbations of Lie algebra structures, in: Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications, Il Ciocco, 1986, in: NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 247, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1988, pp. 265–355.
- [4] M. Goze, E. Remm, Valued deformations, J. Algebra Appl. 3 (2004) 345–365.
- [5] R. Lutz, M. Goze, Non Standard Analysis. A Practical Guide with Applications, Lecture Notes in Math., vol. 881, Springer-Verlag, 1981.
- [6] K. McCrimmon, A Taste of Jordan Algebras, Springer-Verlag, New York, 2004.
- [7] E. Nelson, Internal set theory. A new approach to nonstandard analysis, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977) 1165–1198.
- [8] A. Nijenhuis, R.W. Richardson, Cohomology and deformation of algebraic structures, Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964) 406–411.
- [9] A. Tillier, Quelques applications géométriques des algèbres de Jordan, Publ. Dep. Math. Lyon 14 (3) (1977).
- [10] S.I. Svinolupov, l'ordanovy algebrы i integriruemye sistemy, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 27 (1993) 40–53.